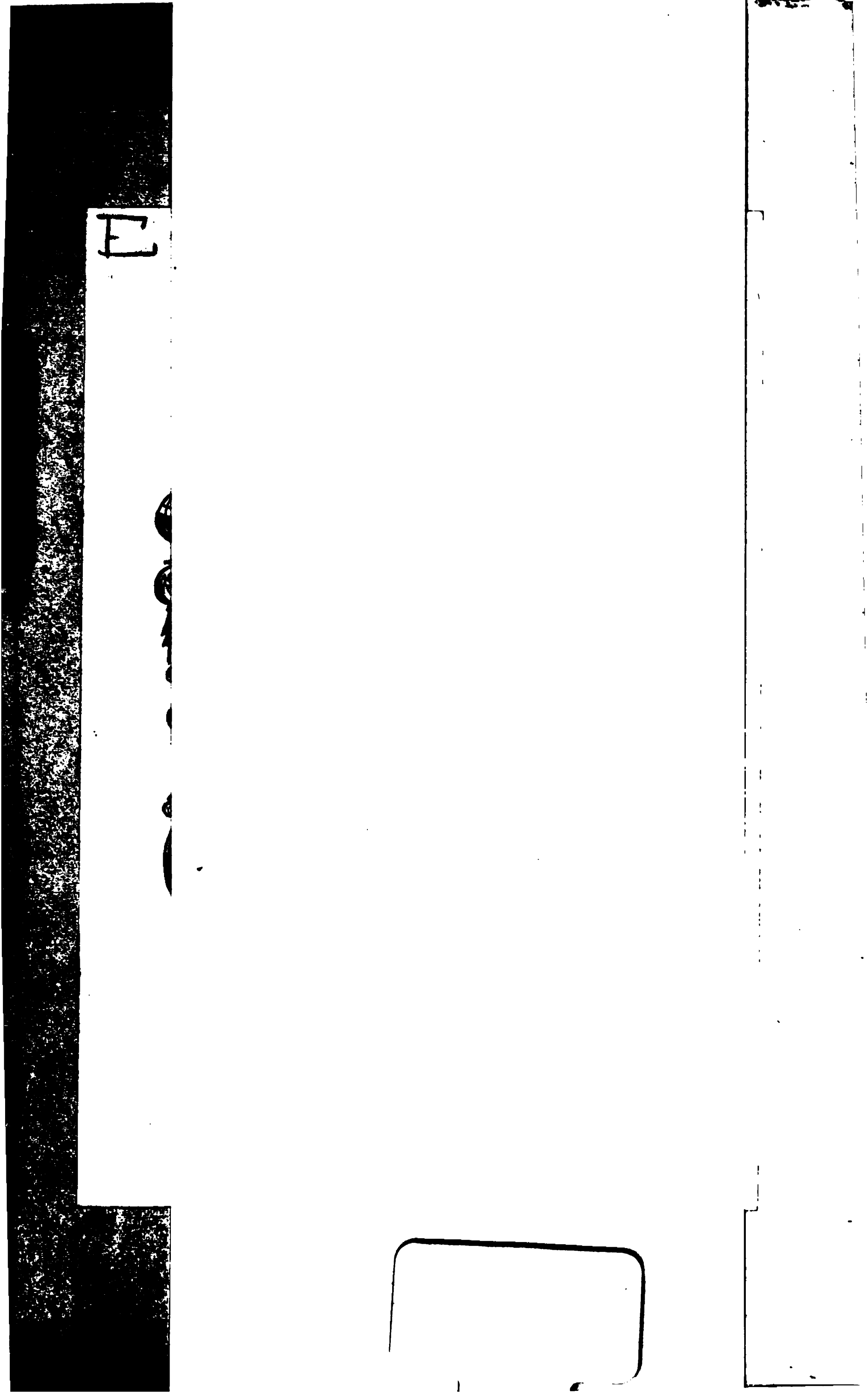
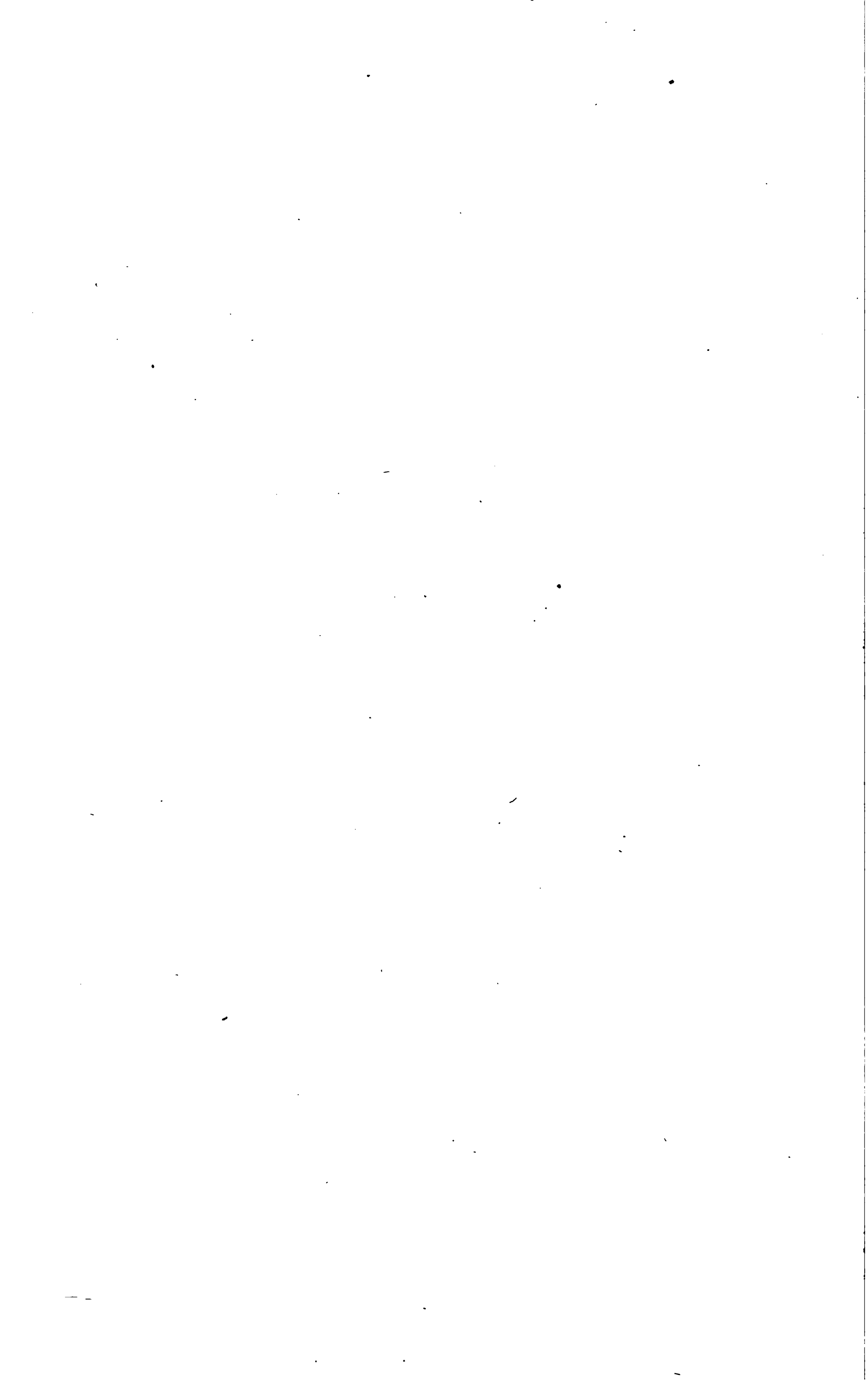






Lehrbuch

der

Karten-Projektion,

enthaltend

eine Anweisung zur Zeichnung der Netze für die verschiedensten Arten von Land- und Himmelskarten.

Von

Dr. Heinrich Gretschel,
Professor an der königl. sächs. Bergakademie Freiberg.

Mit 6 Tafeln und 68 in den Text eingedruckten Abbildungen.



Weimar, 1873.
Bernhard Friedrich Voigt.

Vorwort.

Das Buch, welches ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, ist noch eine Frucht meiner Musse aus der Zeit meiner früheren Thätigkeit als Lehrer in Leipzig. Dasselbe soll seinen Lesern eine Theorie der mannigfachen Methoden geben, deren man sich bei der Zeichnung der Netze für die verschiedenen Arten von Land- und Himmelskarten bedient, und zwar in einer solchen Form, dass zum Verständnisse ein möglichst geringes Maass mathematischer Vorkenntnisse nöthig ist.

Was den Leserkreis betrifft, für welchen ich meine Arbeit berechnet habe, so stehen hier natürlich die Kartographen von Fach an der Spitze. Ihnen soll das Buch einestheils die zur Zeichnung der Netze nöthigen Hilfsmittel an die Hand geben, anderntheils einen tiefern Einblick in das Wesen der einzelnen Projektionsmethoden, ihre Vorzüge und Mängel gewähren, so dass sie in den Stand gesetzt werden, sich ein selbstständiges Urtheil darüber zu bilden, ob eine bestimmte Projektionsart für den oder jenen Zweck mit Nutzen anwendbar ist oder nicht.

Eine andere Klasse von Lesern, denen ich mit meinem Buche einen bescheidenen Dienst zu erweisen wünsche, sind die Lehrer der Geographie. Unter ihnen, die täglich und stündlich mit Karten umgehen und die doch alle wissen sollten, was man auf einer Karte erkennen kann, was nicht, ist die Kenntniss der kartographischen Methoden verhältnissmässig noch wenig verbreitet, und selbst die allergewöhnlichsten Darstellungsweisen, wie etwa die stereographische oder Mercator's Projektion, sind ihrem Wesen nach nur wenigen genauer bekannt.

Endlich möchte ich noch die Lehrer der Mathematik auf die Menge interessanter Probleme aufmerksam machen, welche die kartographischen Methoden für die Zwecke des Unterrichts auf den verschiedensten Stufen darbieten. Ich glaube, dass eine Behand-

lung solcher Aufgaben in der Schule in gleicher Weise dem Studium der Mathematik, wie dem der Geographie förderlich sein muss.

Was nun die Methode betrifft, so glaubte ich, um meine Arbeit einem grösseren Leserkreise zugänglich zu machen, nur möglichst geringe Ansprüche an die mathematischen Kenntnisse meiner Leser stellen zu dürfen. Ganz ohne mathematische Betrachtungen lässt sich indessen nun einmal kein tieferer Einblick in Methoden gewinnen, die so wesentlich mathematischer Natur sind, wie die Projektionsmethoden. Was sich durch Vermittelung der blossen Anschauung, ohne streng mathematische Betrachtungen erreichen lässt, das dürfte Steinhauser in seinem „Grundzügen der mathematischen Geographie und Landkartenprojektion" vollständig geleistet haben, und ein neuer Versuch in ganz gleicher Weise ist kaum nöthig. Auf der andern Seite schien es nicht gerathen, bei allen Lesern die Elemente der Infinitesimal-Rechnung so ohne Weiteres vorauszusetzen, wie dies A. Germain in seinem trefflichen *Traité des projections des cartes géographiques* thut. Ich habe mich vielmehr in der Hauptsache, namentlich da, wo es sich um die Projektion der Kugel handelt, mit den Hilfsmitteln der elementaren Mathematik begnügt, mit denen ich indessen auch Probleme behandelt habe, wie die Bestimmung der Maxima und Minima u. a., die man im Allgemeinen der höhern Analysis vorbehält. Nur bei den allgemeinen Theorien der Aequivalenz und Konformität und bei der Anwendung einzelner Projektionen, auf das Sphäroid, bei der Lagrange'schen Projektion und in einigen andern besondern Fällen, habe ich ohne Weiteres von der Differential- und Integralrechnung Gebrauch gemacht, weil hier eine Beschränkung auf die Hilfsmittel der elementaren Mathematik zu einer ermüdend weitläufigen Darstellung geführt haben würde. Ich wünsche, dass der eine oder andere Leser durch das Studium der elementaren Partieen des Buches veranlasst werden möge, sich soweit mit den einfachen Principien und dem Algorithmus der höhern Rechnungsarten vertraut zu machen, dass ihm auch die übrigen Abschnitte zugänglich werden.

Trotz des verhältnissmässigen Reichthums der älteren deutschen Literatur an tüchtigen Werken über Kartographie, schien es mir doch, als wenn es an einem Werke fehlte, welches über die verschiedenen Arbeiten auf diesem Gebiete in zusammenhängender Weise Rechenschaft giebt. Wenn man das vorliegende Werk, das auf Originalität keinen Anspruch erhebt, von kompetenter Seite geeignet finden sollte, diese Lücke auszufüllen, so würde ich darin den schönsten Lohn für meine Mühe finden.

Freiberg, im März 1873.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Zweites Kapitel.

Die Parallel-Projektion.

Drittes Kapitel.

Die Abbildungen durch Abwickelung.

Viertes Kapitel.

Aequivalente Abbildungen.

Fünftes Kapitel.

Die konformen Abbildungen.

Sechstes Kapitel.

Die zenithalen Abbildungen und verschiedene konventionelle Darstellungsweisen.

Berichtigungen.

Seite 16, Zeile 24 von oben ist vor die Worte „Ein anderes Verfahren etc“. die Nummer 4. zu setzen.

„ 22, Z. 10 von oben muss es heissen „11. Bogenelement etc.“ statt „10. Bogenelement etc.“, und ebenso sind die folgenden Nummern des §. 4 mit 12 und 13 zu bezeichnen statt mit 11 und 12.

„ 22 ist in der Formel (18) für x im Nenner ε^2 statt ε_2 zu setzen.

„ 43 muss es in den beiden ersten Formeln heissen $\left(\frac{l_1}{l}\right)^{\frac{2}{3}}$ statt $\left(\frac{l_1}{l}\right)^{3}$.

„ 57 in Formel (20) muss es tan ψ statt tan φ heissen.

„ 73 muss es in der ersten Formel oben μ statt φ heissen

„ 111, Z. 6 von unten lies „Fig. XII“ statt „Fig. XI„.

„ 151, Z. 12 von unten lies „Denselben Zweck“ statt „Denselben Zwecke“.

„ 157 auf der vorletzten Zeile des §. 15 lies „Fig. XXI“ statt „Fig. XXII“ und „die Erdoberfläche vom Nordpol bis 40° südl. Breite“ statt „die ganze Erdoberfläche“.

„ 171 in Nr. 23 a) steht zweimal $\frac{d\Theta}{d\lambda}$ anstatt $\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}$.

Einleitung.

Die Aufgabe des Kartenzeichnens oder der Kartographie besteht in der bildlichen Darstellung eines mehr oder minder umfangreichen Theiles der Erdoberfläche oder der scheinbaren Himmelskugel in einer Ebene.

Je nach dem Umfange des Theiles der Erdoberfläche, welcher dargestellt wird, führen die Karten verschiedene Namen. Man nennt Weltkarte *(Mappemonde)* eine Karte, welche die ganze Erdoberfläche auf einem einzigen Blatte umfasst; ist dagegen die Erdoberfläche in zwei kreisförmigen Bildern, zwei Hälften derselben darstellend, wiedergegeben, so nennt man dieselben Planisphären oder Planigloben. Mit dem Namen Generalkarten belegt man Karten, welche einen ganzen Erdtheil oder doch wenigstens ein grösseres Ländergebiet darstellen; ihnen gegenüber stehen die Specialkarten, welche kleinere Theile der Erdoberfläche in einem grösseren Maassstabe als dem der Generalkarte und mit mehr Details, als auf dieser möglich ist, abbilden. Letztere Karten nennt man chorographische Karten, wenn sie alle wichtigern geographischen Momente, Flussläufe, Meeresküsten, Seen, Bodenerhöhungen, Ortschaften, Wälder, Hauptstrassen, Eisenbahnen und dergleichen mehr zur Anschauung bringen. Geht, natürlich bei Wahl eines noch grösseren Maassstabes, die Detaillirung noch weiter herab, so dass man auch Feldmarken, einzelstehende Bäume, Gebäude im Grundriss etc. dargestellt findet, so hat man es mit einer topographischen Karte zu thun. Wird nur ein ganz kleiner Theil der Erdoberfläche, eine Ortschaft mit ihrer nächsten Umgebung oder gar nur ein einzelnes Grundstück von der Karte dargestellt, so nennt man dieselbe einen Plan.

Es werden den Karten ferner besondere Namen beigelegt, wenn sie bestimmten Zwecken dienen sollen und daher auch gewisse Momente vorzugsweise bestimmt und deutlich zur Anschauung

bringen, andere dagegen mehr zurücktreten lassen oder gänzlich vernachlässigen. Beispielsweise seien erwähnt: hydrographische Karten, welche die für die Schifffahrt wichtigen Momente angeben; hypsometrische, welche die Höhenverhältnisse, geologische, welche die geologische Beschaffenheit darstellen; Industriekarten, die ein Bild der industriellen Beschäftigung der Bevölkerung bieten, u. a. m.

An diesem Orte haben wir es nur mit der ersten Aufgabe des Kartenzeichnens zu thun, mit der Art und Weise, wie man Figuren von der Erdoberfläche auf die Zeichenebene überträgt oder, was auf dasselbe hinausläuft, wie man zu jedem Punkte der Erdoberfläche den entsprechenden Punkt der Karte findet. Alles was darüber hinausliegt, bleibt von den Untersuchungen dieses Werkes ausgeschlossen.

Die eben erwähnte Aufgabe würde sich in höchst einfacher und dabei völlig zufriedenstellender Weise lösen lassen, wenn die Erdoberfläche eine Ebene wäre. Man hätte dann nur nöthig, die Figuren der Karte ähnlich den wirklichen Figuren, den Länderumrissen, Flussläufen u. s. w. auf der Erdoberfläche zu zeichnen. Es würden dann alle Winkel auf der Karte gleich sein den entsprechenden Winkeln auf der Erde, und ein Blick auf die Karte würde alle Formen so, wie sie in Wirklichkeit sind, erkennen lassen; ferner würden alle Entfernungen auf der Karte unter sich in denselben Verhältnissen stehen, wie die wirklichen Entfernungen auf der Erde, und es würden die erst genannten Entfernungen im Vergleich zu den letztgenannten alle nach einem und demselben festen Verhältnisse verkleinert sein; endlich würden auch zwei Flächenstücke der Karte in demselben Verhältnisse stehen, wie die wirklichen Flächen auf der Erde, und jedes Flächenstück der Karte würde im Vergleich zu der Originalfläche verkleinert sein nach einem Verhältnisse, welches das Quadrat sein würde von dem Verkleinerungsverhältnisse der Längen.

Da aber die Erdoberfläche nicht eben ist, so sind die Bedingungen des Kartenzeichnens nur dann so einfach, wie eben angedeutet, wenn es sich um die Darstellung eines verhältnissmässig so kleinen Flächenstückes handelt, dass man die Krümmung der Erdoberfläche auf demselben vernachlässigen darf. Dieses ist der Fall bei Plänen einzelner Grundstücke, Felder etc.

Fast eben so einfach würde sich die Aufgabe gestalten, wenn die Erdoberfläche die Form einer Cylinder- oder Kegelfläche hätte oder wenn sie überhaupt eine abwickelbare Fläche wäre, d. i. eine solche, welche man ohne Risse oder Falten in eine Ebene ausbreiten kann. Man würde sich nämlich dann die Erdoberfläche oder den zur Abbildung bestimmten Theil derselben zunächst in eine Ebene ausgebreitet oder abgewickelt denken und die Abbildung auf der Karte ähnlich der durch Abwicklung erhaltenen ebenen Figur machen.

Aber auch diese Voraussetzung ist nicht erfüllt; die Erdoberfläche gehört nicht zu den abwickelbaren Flächen, sie kommt vielmehr so nahe einer Kugel gleich, dass wir sie beim Kartenzeichnen

in den meisten Fällen geradenwegs als eine solche betrachten können. Figuren, die auf einer Kugelfläche liegen (sphärische Figuren), lassen sich aber nicht in einer Ebene so abbilden, dass die Abbildung dem Originale ähnlich ist, denn eine ebene Figur kann nur einer andern gleichfalls ebenen Figur ähnlich sein. Man sieht sich daher genöthigt, überhaupt abzusehen in dieser Allgemeinheit von der Aehnlichkeit des Kartenbildes mit dem Originale, sobald es sich um Darstellung grösserer Theile der Oberfläche unseres Planeten handelt.

Ganz dieselbe Schwierigkeit, wie bei der Abbildung der Erdoberfläche, stellt sich uns auch beim Entwerfen der Himmelskarten entgegen, die uns die Lage der Sterne an dem scheinbaren Himmelsgewölbe angeben sollen, denn auch letzteres hat die Form einer Kugelfläche.

Da der einfache Gedanke, die Abbildung ähnlich dem Originale zu machen, sich beim Entwerfen der Erd- und Himmelskarten nicht ausführbar erweist, so hat man zahlreiche Methoden ersonnen, um zum Ziele zu gelangen. Wir heben darunter die folgenden fünf Kategorien besonders hervor:

1. Perspektivische Abbildungen. Man nimmt irgendwo einen festen Punkt O an, in welchem man sich das Auge des Beobachters denkt, und verbindet denselben mit den einzelnen Punkten der darzustellenden Figur durch gerade Linien, welche man Projektionsstrahlen nennt; ausserdem nimmt man noch eine feste Ebene ε, die Zeichen- oder Bildebene an. Unter der Projektion oder Abbildung eines Punktes P der Kugelfläche versteht man dann denjenigen Punkt P', in welchem der Projektionsstrahl OP die Bildebene ε durchdringt. Nachdem man die wesentlichsten Punkte des Originales projicirt hat, braucht man nur noch die auf der Zeichenebene erhaltenen Punkte in derselben Ordnung zu verbinden, wie sie im Originale miteinander verbunden sind.

Als eine besondere Art dieser Abbildungsweise ist zu erwähnen

2. die Parallel-Projektion, die man erhält, wenn man den Punkt O in unendliche Ferne rücken lässt; sämmtliche Projektionsstrahlen sind dann unter sich parallel.

Wird bei der ersten Abbildungsweise der Punkt O ausserhalb der Erde angenommen, so giebt die Abbildung der zugewandten Seite der Erdoberfläche den Anblick wieder, welchen die Erde einem Beobachter gewährt, dessen Auge sich draussen im Punkte O befindet. Denken wir uns dabei den Beobachter in verhältnissmässig grosser Entfernung, also beispielsweise auf dem Monde, so wird die Erde demselben einen Anblick bieten, der sich mehr dem durch Parallel-Projektion erhaltenen Bilde nähert.

3. Die Abbildung durch Abwickelung. Man überträgt zunächst die Figuren, welche sich auf der nicht abwickelbaren Erdoberfläche befinden, auf eine Cylinder- oder Kegelfläche, oder man ersetzt eine Zone der Erde, die man darstellen will, durch

eine solche Fläche, breitet sie dann in eine Ebene aus und zeichnet zu der erhaltenen Figur in verkleinertem Maassstabe ein ähnliches Bild.

Die drei bis jetzt erwähnten Kategorien des Kartenzeichnens sind charakterisirt durch die geometrischen Methoden, welche die Kartenbilder liefern. Von dem speciellen Verfahren, welches angewandt wird, hängen natürlich in jedem einzelnen Falle die Eigenschaften der Abbildung ab, und es entsteht daher für uns die Aufgabe, diese Eigenschaften bei jeder einzelnen Abbildungsweise näher zu untersuchen. Wir werden also zusehen, wie sich bei einer jeden Abbildungsweise die Winkel in dem Kartenbilde zu denen des Originales verhalten, an welchen Stellen der Karte die grösste Uebereinstimmung, an welchen dagegen die grösste Abweichung stattfindet. Ebenso werden wir für die verschiedenen Partien des Bildes das Verhältniss zwischen den Längen der Linien in der Abbildung und denen des Originales studiren müssen, um zu erfahren, auf welche Weise man aus der Karte die Entfernung zwischen zwei Punkten entnehmen kann. In gleicher Weise werden endlich auch die Flächen zu untersuchen sein.

In vielen Fällen verlangt man aber bestimmte Eigenschaften von der Karte, wenn sie ihrem Zwecke genügen soll; und zwar sind es besonders zwei: Das richtige Verhältniss der Flächen und die Aehnlichkeit zwischen Bild und Objekt in den kleinsten Theilen. Daraus ergeben sich noch zwei Kategorien von Abbildungen.

4. Aequivalente Abbildungen. Bei einer solchen Abbildung stehen zwei Flächenstücke auf der Karte genau in demselben Verhältnisse, wie die Originalflächen auf der Erdoberfläche.

5. Konforme oder orthomorphe Abbildungen, dem Originale in den kleinsten Theilen ähnlich. Sind A, B, C drei Punkte der Erdoberfläche und A', B', C' ihre Abbildungen auf der Karte, so wissen wir schon, dass es nicht möglich ist, ein Verfahren anzugeben, durch welches das Dreieck $A'B'C'$ bei jeder beliebigen Lage der Punkte A, B, C und jeder beliebigen Länge der Seiten AB, BC, CA dem Dreiecke ABC ähnlich wird. Wir werden aber sehen, dass es auf unzählig viele Arten möglich ist, die Punkte der Erdoberfläche so auf die Karte zu übertragen, dass jedes Dreieck $A'B'C'$ dem Originale ABC um so mehr ähnlich ist, je kleiner die Seiten des letzteren sind. Sind dann $B, C, D, \ldots$ Punkte der Erdoberfläche, welche um einen Punkt A herumliegen und bedeuten $B', C', D', \ldots, A'$ die Abbildungen der genannten Punkte, so werden die Winkel

$$BAC, \; CAD, \ldots$$

um so genauer mit den Winkeln

$$B'A'C', \; C'A'D', \ldots$$

übereinstimmen, je kleiner die Strecken AB, AC, AD, ... sind, und um so mehr werden auch die Verhältnisse

$$\frac{A'B'}{AB}, \; \frac{A'C'}{AC}, \; \frac{A'D'}{AD}, \ldots$$

unter sich gleich sein. Der gemeinsame Werth, dem sich diese Verhältnisse mit abnehmender Länge der Strecken nähern (das Verkleinerungsverhältniss), ist aber im Allgemeinen für verschiedene Punkte A ein verschiedener, während er für ähnliche Figuren konstant ist.

Mit der Aufzählung dieser fünf Kategorien der Kartenzeichnung ist zugleich die Gliederung des vorliegenden Buches bestimmt. Dasselbe wird zuerst die perspektivischen Abbildungen, dann die Parallel-Projektion, hierauf die Abbildungen durch Abwickelung, sodann die äquivalenten Abbildungen und hierauf endlich die konformen behandeln. In dem letzten Kapitel sollen dann anhangsweise noch einige andere Darstellungsweisen besprochen werden, die in den vorhergehenden Kapiteln nicht erwähnt worden sind.

Erstes Kapitel.

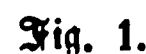
Die perspektivischen Abbildungen.

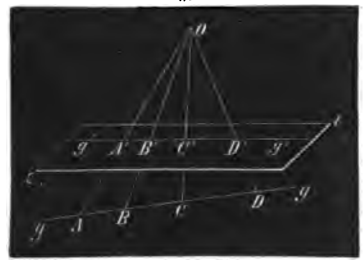
I. Allgemeine Theorie.

§. 1.

Perspektivische Abbildung der geraden Linie und des Kreises im Allgemeinen.

1. Sind A, B, C, D, ... Punkte, welche auf einer Geraden g liegen, so fallen die vom Auge O ausgehenden Projektionsstrahlen OA, OB, OC, OD, ... sämmtlich in eine Ebene, welche von der Bildebene ε in einer Geraden g' geschnitten wird. Daher fallen auch die Punkte A', B', C', D', ..., in denen die Projektionsstrahlen OA, OB, OC, OD, ... die Bildebene schneiden, alle in diese Gerade g' und die perspektivische Abbildung einer Geraden ist daher wieder eine Gerade.


Fig. 1.



Eine, wenigstens scheinbare, Ausnahme erleidet diese Regel in dem Falle, dass die gegebene Gerade g durch den Punkt O geht; dann nämlich schrumpft die Projektion g' in einen Punkt zusammen, den Schnittpunkt der Bildebene ε mit der Geraden g.

2. Daraus geht hervor, dass die perspektivische Abbildung irgend einer geradlinigen Figur wieder eine geradlinige Figur von gleicher Linienzahl ist. Die nähere Aufzählung derjenigen Eigenschaften einer Figur, welche sich in der perspektivischen Abbil-

dung wieder finden, unterlassen wir hier, als ausserhalb der Grenzen dieses Buches liegend.*)

3. Wenn eine Kreislinie k gegeben ist und man verbindet alle Punkte derselben mit dem festen, nicht in ihrer Ebene gelegenen Punkte O, so bildet die stetige Folge dieser Verbindungslinien eine Kegelfläche; die einzelnen Verbindungslinien nennt man die Erzeugenden der Kegelfläche, den Punkt O die Spitze des Kegels.

4. Eine durch den Punkt O gehende Ebene kann gegen die Kegelfläche drei wesentlich verschiedene Lagen haben:

a. sie kann mit dieser Fläche nur den Punkt O gemein haben;

b. sie kann eine Erzeugende mit der Kegelfläche gemein haben oder die Kegelfläche längs dieser Erzeugenden berühren, und

c. sie kann die Kegelfläche in zwei Erzeugenden schneiden.

5. Eine beliebige, den Kegel schneidende Ebene, welche nicht durch den Punkt O geht, ist entweder der Lage a., oder der Lage b., oder der Lage c. parallel.

Im ersten Falle schneidet sie alle Erzeugende des Kegels in endlicher Ferne und man erhält als Schnittfigur eine geschlossene, auf ein endliches Gebiet beschränkte Kurve, welche man eine Ellipse nennt; der Kreis gehört als Specialfall hierher.

Im zweiten Falle, wenn also die Schnittebene einer Erzeugenden des Kegels parallel geht, werden alle Erzeugende mit Ausnahme jener einen in endlicher Entfernung geschnitten; nur nach einer Richtung hin hat die Schnittkurve einen unendlich entfernten Punkt. Dieselbe heisst dann eine Parabel.

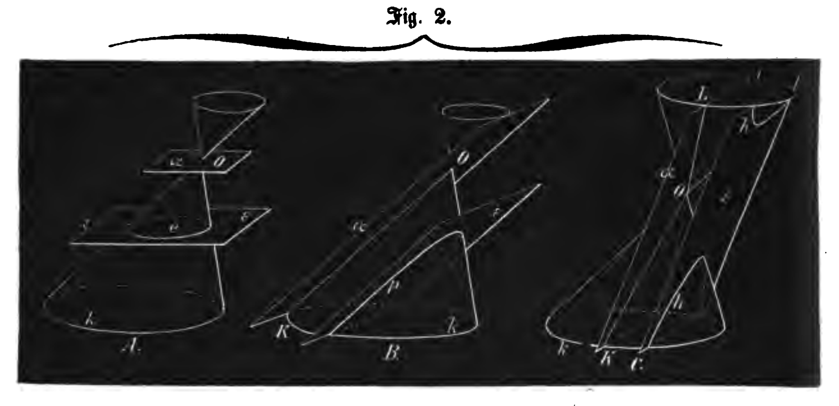
Im dritten Falle endlich geht die Schnittebene zweien Erzeugenden parallel, sie schneidet diese beiden also in unendlicher Ferne und die Schnittkurve hat sonach zwei unendlich entfernte Punkte oder sie verläuft nach zwei Richtungen hin in unendliche Ferne. Ueberdies besteht die Schnittkurve aus zwei getrennten Theilen, indem die Schnittebene einem Theile der Erzeugenden auf der einen Seite der Spitze O, dem anderen aber erst bei ihrer Rückwärtsverlängerung über O hinaus begegnet. Die Kurve heisst eine Hyperbel.

In **Fig. 2A**, **B** und **C** sind die drei wesentlich verschiedenen Lagen der Schnittebene, die überall mit ε bezeichnet ist, dargestellt; α bedeutet in allen drei Figuren die durch die Spitze O gehende Ebene, die entweder (**Fig. 2A**) keine Erzeugende, oder eine einzige (OK in **Fig. 2B**) oder zwei (OK und OL in **Fig. 2C**) mit der Kegelfläche gemein hat. Der abzubildende Kreis ist überall mit k bezeichnet; e in **Fig. 2A** ist die Ellipse, p in **Fig. 2B** die Parabel, hh in **Fig. 2C** sind die beiden Zweige der Hyperbel.

---

*) Näheres darüber enthalten die Lehrbücher der sogenannten neueren Geometrie, z. B. des Verfassers Lehrbuch zur Einführung in die organische Geometrie. Leipzig, Quandt & Händel. 1868.

Fig. 2.



6 Da man Ellipse, Hyperbel und Parabel mit dem gemeinsamen Namen **Kegelschnitte** belegt, so kann man sagen, dass **die perspektivische Abbildung eines Kreises immer ein Kegelschnitt ist.**

§. 2.

Der Kreis als perspektivische Abbildung eines Kreises.

1. Da parallele Schnitte einer Kegelfläche einander ähnlich sind und einem Kreise nur ein Kreis ähnlich sein kann, so ist **die perspektivische Abbildung eines Kreises k auf eine der Ebene dieses Kreises parallele Ebene stets wieder ein Kreis,** und zwar liegen die Mittelpunkte aller dieser Kreise in einer Geraden, die durch die Spitze O geht, und die Halbmesser sind **proportional** den Entfernungen der Mittelpunkte von der Spitze.

2. Zum besseren Verständnisse des Folgenden wollen wir auf die analytische Charakterisirung des Kreises aufmerksam machen, die sich in der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

ausspricht, wo r den Halbmesser des Kreises, $y = PN$ die Ordinate des Punktes P oder die von P auf den Durchmesser AB gefällte Senkrechte, und $x = MN$ die Abscisse des Punktes P, vom Mittelpunkte M aus gerechnet, ausdrückt. Man kann diese Gleichung auch in der Form

Fig. 3.

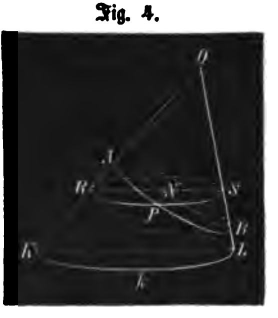
$$y^2 = r^2 - x^2 = (r + x)(r - x)$$

schreiben, und da $BN = r + x$, $NA = r - x$ ist, so kann man statt (1) auch setzen

$$NP^2 = BN \cdot NA. \tag{2}$$

3. Legt man durch die Spitze O des Kegels eine Ebene, welche auf der Ebene des Kreises k rechtwinklig steht, so schneidet dieselbe die Kegelfläche in zwei Erzeugenden OK und OL

Fig. 4.



und die Ebene des Kreises in dem Durchmesser KL. Das Dreieck OKL nennt man auch das Achsendreieck. Alle Ebenen, welche zu KL parallel sind und auf der Ebene des Achsendreieckes rechtwinklig stehen, schneiden nach Nr. 1 dieses Paragraphen den Kegel in Kreisen.

Aber diese Kreisschnitte sind nicht die einzigen, die es giebt. Zieht man nämlich eine Gerade in der Ebene des Achsendreieckes, welche die beiden Seiten OK und OL in A und B schneidet, und zwar so, dass

$$(3) \qquad \angle OAB = \angle OLK \text{ und } \angle OBA = \angle OKL$$

ist, und legt man dann durch AB eine auf der Ebene des Achsendreieckes senkrechte Ebene, so schneidet dieselbe den Kegel auch in einem Kreise, dessen Durchmesser AB ist.

Zum Beweise legen wir durch einen beliebigen Punkt P auf der Peripherie dieses Schnittes eine auf der Ebene des Achsendreieckes senkrechte und zu KL parallele Ebene. Dieselbe schneidet zufolge Nr. 1 den Kegel in einem Kreise, dessen Durchmesser RS ist. Bezeichnet man dann den Schnittpunkt von AB und RS mit N, so ist NP senkrecht auf RS (und AB) und zufolge Gleichung (3) ist auch

$$NP^2 = RN \cdot NS.$$

Da aber die Dreiecke ANR und SNB ähnlich sind, so ist

$$RN \cdot NS = BN \cdot NA$$

und mithin

$$NP^2 = BN \cdot NA,$$

also [zufolge der obigen Gleichung (2)] die Schnittkurve APB ein Kreis.

Es giebt sonach für einen jeden Kegel zwei Systeme von parallelen Ebenen, welche den Kegel in Kreisen schneiden. Zwei Schnitte, welche diesen beiden Systemen angehören, werden als Wechselschnitte bezeichnet.

4. Durch zwei Wechselschnitte lässt sich stets eine Kugel legen.

Zunächst nämlich ist leicht einzusehen, dass man durch die Endpunkte der beiden in der Ebene des Achsendreieckes liegenden Durchmesser, etwa KL und AB in Fig. 4, stets einen Kreis legen kann. Denn wegen der Gleichungen (3) sind die Dreiecke OKL und OBA ähnlich und folglich ist

$$OA \cdot OK = OB \cdot OL,$$

welche Gleichung ausdrückt, dass A, B, K und L auf dem Umfange eines Kreises liegen. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schnittpunkt der Senkrechten, die man auf AB und KL in den Halbirungspunkten dieser Linien errichten kann. Da aber jeder

Punkt der Senkrechten auf der Mitte von AB (beziehentlich KL) gleichweit absteht von allen Punkten der Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser AB (beziehentlich KL) ist, so ist der Durchschnittspunkt beider Senkrechten von beiden Kreisen gleichweit entfernt, also Mittelpunkt einer Kugel, welche beide Kreise enthält.

5. Legt man von einem auf der Durchschnittsgeraden der Ebenen zweier Wechselschnitte gelegenen Punkte aus Tangenten an beide Wechselschnitte, so haben dieselben gleiche Länge; denn es sind Tangenten an dieselbe Kugelfläche.

§. 3.

Analytische Charakterisirung der drei Kegelschnitte.

1. Ein Kegelschnitt hat mit einer Geraden nicht mehr als zwei Punkte gemein. Denn der Kreis hat diese Eigenschaft, Kegelschnitt und Gerade sind perspektivische Abbildungen des Kreises und der Geraden, und einem Punkte entspricht auch in der Abbildung wieder ein Punkt.

2. Bedeuten x und y die Parallel-Koordinaten eines Punktes der Zeichenebene, d. h. die parallel zu den im Allgemeinen schiefwinkligen Achsen OX und OY gemessenen Abstände des Punktes P von diesen Achsen, nämlich

$$x = NP = OM \text{ und } y = MP = ON,$$

Fig. 5.

so drückt jede Gleichung zwischen x und y im Allgemeinen eine Linie aus. Ein Kegelschnitt ins Besondere wird charakterisirt durch eine Gleichung, die sowohl im Bezug auf x als im Bezug auf y vom zweiten Grade ist. Denn wenn man z. B. für x einen festen Werth

$$x = a$$

annimmt und in die Gleichung einsetzt, so muss die Gleichung zwei Werthe von y ergeben. Die Gleichung $x = a$ drückt nämlich eine zur Achse OY parallele Gerade aus und jede Gerade wird im Allgemeinen zwei Punkte mit dem Kegelschnitt gemein haben. Das Gleiche gilt, wenn man für y einen festen Werth b substituirt.

Sonach ist die allgemeine Gleichung eines Kegelschnittes:

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

wo $A, B, \ldots, E, F$ gewisse konstante, d. h. von x und y unabhängige Grössen sind, deren Werthe ausser von der Beschaffenheit des betreffenden Kegelschnittes auch von der Wahl der Koordinaten-Achsen abhängen.

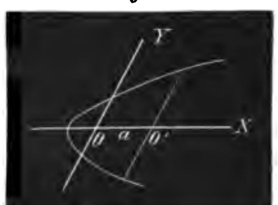
3. Bisher haben wir die Koordinaten-Achsen ganz willkürlich angenommen; jetzt aber wollen wir dieselben so wählen, dass

a. der Koordinatenanfang O im Halbirungspunkte einer Sehne liegt, die wir als Ordinaten-Achse OY annehmen, und

b. soll die Abscissen-Achse OX durch den Halbirungspunkt O' einer zweiten, der ersten parallelen Geraden gelegt werden.

Der ersten Bedingung zufolge muss man für $x = 0$ zwei entgegengesetzt gleiche Werthe für y erhalten; der zweiten Bedingung gemäss muss dasselbe auch stattfinden für $x = OO' = a$. In beiden Fällen muss also die Gleichung im Bezug auf y rein quadratisch werden.

Fig. 6.



Nun erhält man aus (1) für $x = 0$

$$Cy^2 + 2Ey + F = 0$$

und damit diese Gleichung rein quadratisch werde, müss $E = 0$ sein.

Lässt man demgemäss das Glied $2Ey$ aus (1) weg und setzt $x = a$, so erhält man

$$Aa^2 + 2Bay + Cy^2 + 2Da + F = 0,$$

und damit diese Gleichung rein quadratisch werde, muss $B = 0$ sein.

Wählt man also die Koordinaten-Achsen den erwähnten zwei Bedingungen gemäss, so nimmt die Gleichung eines Kegelschnittes stets die Form an

$$(2) \qquad Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + F = 0.$$

Da diese Gleichung im Bezug auf y rein quadratisch ist, so halbirt OX jede zu OY parallele Gerade, und in sofern als OY eine ganz beliebig gewählte Gerade ist, erkennt man, dass alle einer Richtung parallelen Sehnen eines Kegelschnittes von einer Geraden halbirt werden. Man nennt letztere den der Richtung der Sehnen konjugirten Durchmesser.

4. Statt der Gleichung (2) kann man auch schreiben

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + Cy^2 + F - \frac{D^2}{A} = 0.$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt O der Koordinaten um die Strecke $\frac{D}{A}$ nach links hin, so tritt x an die Stelle des bisherigen Ausdruckes $x + \frac{D}{A}$ und die Gleichung nimmt nunmehr die Form an

$$(3) \qquad Ax^2 + Cy^2 = G,$$

wo G abkürzungsweise statt $\frac{D^2}{A} - F$ gesetzt worden ist.

Diese Verlegung des Anfangspunktes ist immer statthaft, den einen Fall ausgenommen, wenn $A = 0$, also die Strecke $\frac{D}{A}$ unendlich gross ist. Dann aber tritt an die Stelle von (2) die einfachere Gleichung

$$(4) \qquad Cy^2 + 2Dx + F = 0.$$

Jeder Kegelschnitt lässt sich also entweder durch eine Gleichung von der Form (3) oder durch eine solche von der Form (4) charakterisiren.

5. Wir wenden uns jetzt zunächst zur Gleichung (3). Wir können hier unbeschadet der Allgemeinheit G als positiv voraussetzen; A und C können dann entweder beide positiv sein, oder eine dieser Grössen ist positiv, die andere negativ. Im ersteren Falle setzen wir

$$\frac{G}{A} = + a^2, \quad \frac{G}{C} = + b^2$$

und die Gleichung (3) geht nach vollzogener Division mit G und Einsetzung vorstehender Werthe über in

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Im zweiten Falle dagegen setzen wir

$$\frac{G}{A} = + a^2, \quad \frac{G}{C} = - b^2$$

und erhalten aus (3) die neue Gleichung

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Endlich wenden wir uns zur Gleichung (4), der wir zunächst die Form geben

$$y^2 = - \frac{2D}{C} \left(x + \frac{F}{2D}\right).$$

Verlegen wir hier den Anfangspunkt O um das Stück $\frac{F}{2D}$ nach links, so dass x an die Stelle des eingeklammerten Ausdruckes tritt, und setzen wir ferner

$$- \frac{2D}{C} = p,$$

so erhalten wir die einfache Gleichung

$$(7) \qquad y^2 = px.$$

Es giebt also drei wesentlich verschiedene Kegelschnitte, welche durch die Gleichungen (5), (6) und (7) charakterisirt sind.

6. In Gleichung (5) können x und y nicht alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, vielmehr muss

$$0 \leqq \frac{x^2}{a^2} \leqq 1 \text{ und } 0 \leqq \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$$

und mithin

$$-a \leqq x \leqq +a \text{ und } -b \leqq y \leqq +b$$

sein. Die Kurve ist also auf ein endliches Gebiet, nämlich auf die Innenseite des Parallelogrammes eingeschränkt, welches von den Geraden

$$x = \pm a \text{ und } x = \pm b$$

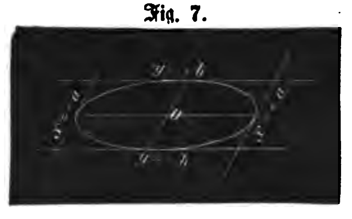
gebildet wird. Dem in Nr. 5 des §. 1 Gesagten zufolge ist also die durch die Gleichung (5) ausgedrückte Kurve eine **Ellipse** (**Fig. 7**).

7. In Gleichung (6) dagegen ist

$$\frac{x^2}{a^2} \geqq 1,$$

d. h. der absolute Werth von x ist mindestens gleich a. Es giebt also in dem Flächenstreifen, welcher von beiden Geraden

Fig. 7.



$$x = \pm a$$

begrenzt wird, keine Punkte der Kurve, wohl aber auf beiden Seiten desselben; die Kurve besteht demnach aus zwei getrennten Zweigen.

Ferner erhält man aus (6)

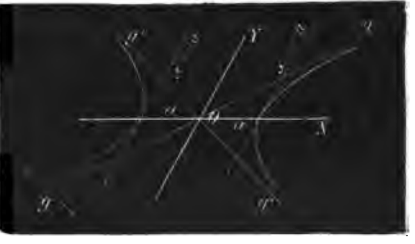
$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2}.$$

Für sehr grosse Werthe von x kann man nun das zweite Glied rechts seiner Kleinheit wegen gegen das erste vernachlässigen und man erhält annäherungsweise

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

D. h. je grösser x und y sind, desto mehr schliesst sich die Kurve den durch die Doppelgleichung

Fig. 8.



$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$$

ausgedrückten, durch den Anfangspunkt O gehenden zwei Geraden g und g' an. Die Kurve verläuft also in Richtung dieser beiden Geraden ins Unendliche, hat zwei unendlich entfernte Punkte und ist also zufolge §. 1, Nr. 5 eine Hyperbel (Fig. 8).

8. Was endlich die Gleichung

$$(7) \qquad y^2 = px$$

anlangt, so wollen wir hier x in derselben Richtung von O aus messen, wie p, mit anderen Worten, wir wollen p als positiv voraussetzen. Dann kann x alle Werthe von 0 bis $+\infty$ annehmen; die Kurve erstreckt sich also nach einer Richtung, nämlich derjenigen der Achse OX, ins Unendliche und ist demnach eine Parabel.

Damit haben wir auf analytischem Wege wieder dieselben drei Kegelschnitte nachgewiesen, die wir geometrisch schon in §. 1 kurz charakterisirt haben.

9. Ellipse und Hyperbel unterscheiden sich dadurch wesentlich von der Parabel, dass sie einen Mittelpunkt haben, während letztere keinen solchen besitzt. Der Anfangspunkt der Koordinaten ist nämlich bei den durch die Gleichungen (5) und (6) dargestellten

Kurven ein Mittelpunkt in dem Sinne, dass er jede durchgehende Sehne der Kurve oder jeden Durchmesser halbirt.

Fig. 9.

Denn wird die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

durch die Koordinaten $x = + m$ und $y = + n$ eines Punktes P befriedigt, und liegt also P auf der Kurve, so genügen auch die Koordinaten $x = - m$ und $y = - n$ eines Punktes, der P' heissen mag, derselben Gleichung. Es liegen aber dann P und P' mit O in gerader Linie und zwar ist $OP = P'O$.

Wir wenden uns nunmehr zur genaueren Betrachtung der drei Kegelschnitte.

§. 4.

Die Ellipse.

1. Aus dem Umstande, dass die Gleichung der Ellipse

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sowohl im Bezug auf x, als im Bezug auf y rein quadratisch ist, geht hervor, dass alle zur Achse der x parallelen Sehnen von der Achse der y halbirt werden, alle zur Achse der y parallelen dagegen von der Achse der x. Die beiden Koordinaten-Achsen werden deshalb konjugirte Durchmesser genannt.

Da im vorigen Paragraphen die Richtung der Achse OY ganz willkürlich angenommen worden ist, so giebt es zu jedem Durchmesser der Ellipse einen konjugirten.

2. Beschreibt man um den Mittelpunkt O der Ellipse einen Kreis mit dem Halbmesser r und wendet man dieselben Koordinaten-Achsen an, wie in Gleichung (1), setzt $\angle XOY = \alpha$, $ON = x$, $NP = y$ (**Fig. 10**), so ist

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha = r^2$$

die Gleichung dieses Kreises.

Nehmen wir nun an, P sei ein Durchschnittspunkt des Kreises und der Ellipse, so müssen x und y in den Gleichungen (1) dieselben Werthe haben. Nun erhält man aus (1)

$$(3) \qquad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

und wenn man diesen Werth in (2) einsetzt und quadrirt, so ergiebt sich eine Gleichung, welche nur die zweite und vierte Potenz von x enthält. Aus derselben erhält man vier Werthe von x, welche paarweise entgegengesetzt gleich sind; sie mögen kurz durch

$$x_1 = + m, \quad x_2 = - m, \quad x_3 = + m', \quad x_4 = - m'$$

bezeichnet werden. Setzt man ferner $x = \pm m$ in die Gleichung (3), so erhält man für y zwei entgegengesetzt gleiche Werthe, welche $y = \pm n$ heissen mögen. Von diesen zwei Werthen gehört einer zu x_1, der andere zu x_2; denn wenn $x = +m$ und $y = +n$ die Gleichung (2) befriedigen, so thun dies $x = +m$ und $y = -n$ nicht, weil sonst gleichzeitig

$$m^2 + n^2 \pm 2mn \cos \alpha = r^2$$

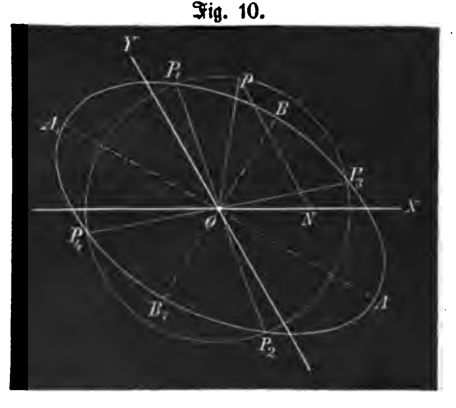
sein müsste. Wir wollen also annehmen, es gehören zu einander die Werthe

$$x_1 = +m \qquad x_2 = -m$$
$$y_1 = +n \qquad y_2 = -n.$$

Ganz analog verhält es sich mit den Lösungen $y = \pm n'$, die man durch Einsetzung von $x = \pm m'$ in (3) erhält. Es ergeben sich dann noch die Koordinaten

$$x_3 = +m' \qquad x_4 = -m'$$
$$y_3 = +n' \qquad y_4 = -n'.$$

Fig. 10.

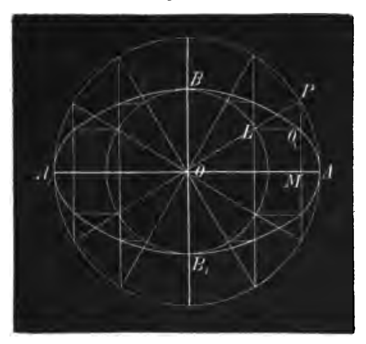


Die vier Punkte, deren Koordinaten mit den Indices 1, 2, 3, 4 bezeichnet sind, und welche P_1, P_2, P_3, P_4 heissen mögen, sind die Schnittpunkte des Kreises und der Ellipse. Man erkennt leicht, dass dieselben wirklich existiren, die Koordinaten also reell sein müssen, wenn der Werth des Halbmessers r zwischen a und b liegt.

Aus den Koordinaten ergiebt sich aber, dass $P_1 O = OP_2$ und $P_3 O = OP_4$ ist; das Viereck $P_1 P_3 P_2 P_4$ ist also ein Parallelogramm; da aber $P_1 P_2 = P_3 P_4$ ist, weil beide Durchmesser des Kreises sind, so ist dieses Viereck weiter ein Rechteck.

Halbirt man nun die (in der Figur nicht angegebenen) Sehnen $P_1 P_3$ und $P_4 P_2$ durch einen Durchmesser $B_1 B$ und die Sehnen $P_1 P_4$ und $P_3 P_2$ durch den Durchmesser $A_1 A$, so sind beide Durchmesser einander konjugirt und stehen rechtwinklig aufeinander. Eine jede Ellipse hat also zwei auf einander senkrechte konjugirte Durchmesser, welche man die Achsen der Kurve nennt. Die Gleichung der Ellipse hat natürlich auch für diese Achsen die Form (1), weil ja in Nr. 3 des vorigen Paragraphen die Richtung der OY ganz willkürlich gewählt worden ist. Die Werthe von a und b sind aber für verschiedene Achsen im Allgemeinen verschieden. Bei rechtwinkligen Koordinaten nennt man den grösseren der beiden Durchmesser, welcher $2a$ sein möge, die Hauptachse, den kleineren dagegen, $2b$, die Nebenachse.

Fig. 11.



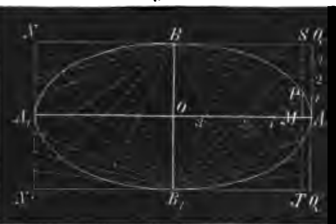
3. Konstruktion der Ellipse, wenn die Achsen $A_1A = 2a$ und $B_1B = 2b$ gegeben sind. Um O als Mittelpunkt beschreibe man mit den Halbmessern OA und OB zwei Kreise und nehme auf dem ersteren eine Anzahl von Punkten, am besten in gleichen Abständen, an. P sei ein solcher Punkt. Man fälle dann die Senkrechte PM auf die Hauptachse und ziehe den Halbmesser OP, welcher den kleinen Kreis in L schneidet; ferner ziehe man noch LQ parallel zur Achse A_1A; dann ist Q ein Ellipsenpunkt. Denn es ist, wenn $OM = x$ gesetzt wird,

$$MQ = y = \frac{OL}{OP} \cdot MP = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

entsprechend Gleichung (3)

Sind zwei schiefwinklig konjugirte Durchmesser gegeben, so stelle man zuerst den kleineren senkrecht zum grösseren, konstruire dann eine Ellipse, wie in voriger Nummer und drehe nun zuletzt jede Ordinate y um ihren Fusspunkt auf der x-Achse, bis sie die richtige Neigung gegen diese Achse hat.

Fig. 12.



Ein anderes Verfahren zur Konstruktion von Ellipsenpunkten, wenn $A_1A = 2a$ und $B_1B = 2b$ gegeben sind, zeigt uns **Fig. 12.** Man konstruire das Rechteck $QNN'Q'$, theile jede der beiden Linien AQ und AO in gleichviele gleiche Theile, die man von A aus numerirt, und verbinde einen Punkt auf AQ mit B, den gleichnamigen auf AO mit B_1; dann ist der Schnittpunkt beider Verbindungslinien ein Ellipsenpunkt im ersten Quadranten. Ganz ebenso ist die Konstruktion für die übrigen Quadranten.

Zum Beweise wählen wir den mittels der beiden Theilpunkte 1 erhaltenen Punkt P, dessen Abscisse $x = OM$ und dessen Ordinate $y = MP$ ist. Verlängern wir MP bis T und S und bezeichnen mit I den Theilpunkt 1 auf AQ, mit K den Theilpunkt 1 auf AO, so ist

$$\frac{TP}{B_1T} = \frac{OB_1}{KO} \text{ und } \frac{PS}{BS} = \frac{IQ}{BQ},$$

folglich

$$\frac{TP \cdot PS}{B_1T \cdot BS} = \frac{OB_1 \cdot IQ}{KO \cdot BQ}.$$

Links ist $TP = b + y$, $PS = b - y$, $B_1T = BS = x$, rechts aber

$$\frac{IQ}{KO} = \frac{OB_1}{BQ} = \frac{b}{a},$$

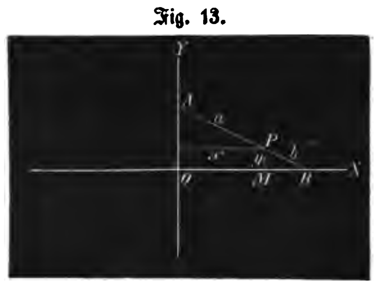
also geht vorstehende Gleichung in

$$\frac{b^2 - y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

über, welche mit der Ellipsengleichung (1) übereinstimmt.

Noch eine andere Methode zeigt **Fig. 13.** Eine gerade Linie von gegebener Länge, AB, bewegt sich so, dass ihr Endpunkt B immer auf der x-Achse, der andere Endpunkt A aber immer auf der y-Achse bleibt. Ist P ein Punkt dieser Geraden, der von A um a, von B um b absteht und sind x und y seine Koordinaten, so ist

Fig. 13.



$$\frac{x}{a} = \cos ABO, \quad \frac{y}{b} = \sin ABO,$$

mithin

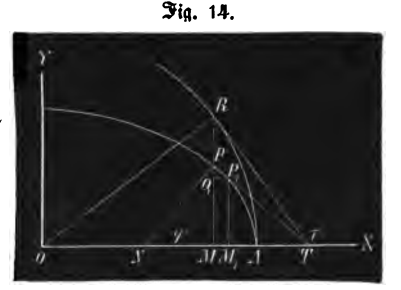
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

woraus sich ergiebt, dass P eine Ellipse mit den Halbachsen a und b beschreibt.

Der Punkt P kann auch auf der Verlängerung der Strecke AB liegen.

5. Tangenten der Ellipse. P und P_1 seien zwei einander sehr nahe liegende Punkte einer Ellipse mit den Koordinaten x, y und x_1, y_1, von denen wir annehmen wollen, dass sie rechtwinklig sind. Dann hat man die aus (1) sich ergebenden Gleichungen

Fig. 14.



$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$
$$a^2y_1 + b^2x_1^2 = a^2b^2,$$

aus denen sich durch Subtraktion

$$a^2 (y_1^2 - y^2) + b^2 (x_1^2 - x^2) = 0$$

ergiebt. Dividirt man diese Gleichung mit der Differenz $x_1 - x$, so kann man das Resultat in der Form schreiben

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x}{y_1 + y}. \tag{4}$$

Die Bedeutung des Quotienten der Differenzen $y_1 - y$ und $x_1 - x$ ist leicht aus der Figur erkennbar. Zieht man nämlich P_1Q parallel zur Hauptachse, so drückt der Quotient

$$\frac{y - y_1}{x_1 - x} = \frac{QP}{QP_1}$$

die trigonometrische Tangente des Winkels QP_1P aus und der in (4) stehende Quotient, welcher der negative Werth des vorigen ist, bedeutet also die trigonometrische Tangente des Winkels, welcher die Verlängerung der Geraden P_1P mit der Hauptachse nach rechts hin (nach der Seite des Wachsens von x) einschliesst.

Lassen wir den Unterschied $x_1 - x$ immer kleiner werden, was zur Folge hat, dass auch $y_1 - y$ immer kleiner wird und P_1 näher und näher an P rückt, so nähert sich die die Sekante P_1P mehr und mehr der Tangente der Ellipse im Punkte P, d. h. derjenigen Geraden, für welche die beiden Schnittpunkte in P koincidiren. Eine bis zur Grenze Null abnehmende Differenz $x_1 - x$ bezeichnet man mit dem Symbol der Differentialrechnung dx und nennt sie „das Differential von x", und ebenso wird das Differential von y, nämlich die bis zur Grenze Null abnehmende Differenz $y_1 - y$, mit dy bezeichnet. Den Werth des Differential-Quotienten $\frac{dy}{dx}$ erhalten wir aus Gleichung (4), wenn wir rechts $x_1 = x$ setzen; es ergiebt sich auf diese Weise

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}. \tag{5}$$

Die Bedeutung dieses Differentialquotienten kann nach vorstehender Auseinandersetzung auch keinem Zweifel unterliegen. Derselbe drückt die trigonometrische Tangente des Winkels τ aus, den die geometrische Tangente des Ellipsenpunktes P nach rechts hin mit der Hauptachse der Ellipse bildet:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \tau. \tag{6}$$

Es ist hiernach leicht, das Stück MT vom Fusspunkte M der Ordinate bis zum Schnittpunkte T der Tangente mit der Abscissenachse zu berechnen, die sogenannte Subtangente. Setzt man nämlich $\angle MPT = \varphi$, so ist $\varphi = \tau - 90^0$ und also

$$\tan \varphi = -\cot \tau = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$

und ferner ist

$$MT = MP \cdot \tan \varphi = y \cdot \tan \varphi = \frac{a^2 y^2}{b^2 x}. \tag{7}$$

Für die Entfernung OT ergiebt sich

$$OT = x + MT = x + \frac{a^2 y^2}{b^2 x} = \frac{b^2 x^2 + a^2 y^2}{b^2 x}.$$

Hier ist Gleichung (1) zufolge der Zähler rechts $= a^2 b^2$ und daher

$$OT = \frac{a^2}{x}. \tag{8}$$

Man sieht, dass dieser Werth von b unabhängig ist. Errichtet man also über der grossen Achse der Ellipse einen Kreis, ver-

längert die Ordinate MP bis zum Schnittpunkte R mit dem Kreise und legt hier eine Tangente an denselben, so geht sie auch durch T. Dies giebt ein bequemes Mittel zur Konstruktion der Tangente.

6. Normalen der Ellipse. Wird im Punkte P eine Senkrechte auf der Tangente errichet, welche in N die Hauptachse schneidet, so heisst dieselbe die Normale des Ellipsenpunktes P. Für den Winkel φ, unter welchem dieselbe die x-Achse schneidet, haben wir schon vorher die Formel

$$\tan \varphi = \frac{a^2 y}{b^2 x} \tag{9}$$

kennen gelernt. Für das Stück NM, die Subnormale, erhält man

$$NM = y \cot \varphi = \frac{b^2 x}{a^2} \tag{10}$$

und die Strecke ON ist daher

$$ON = x - NM = x - \frac{b^2 x}{a^2}$$

oder

$$ON = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x \tag{11}$$

7. Brennpunkte. Durch Multiplikation der beiden Gleichungen (8) und (11) ergiebt sich

$$ON \cdot OT = a^2 - b^2;$$

dieses Produkt ist also eine konstante Grösse. Trägt man beiderseits von O auf der Hauptachse die Strecken

Fig. 15.

$$F_1 O = OF = \sqrt{a^2 - b^2} = e$$

ab, so nennt man F_1 und F die Brennpunkte der Ellipse; die Entfernung e eines Brennpunktes vom Mittelpunkte O heisst die lineare Excentricität, das Verhältniss

$$\frac{e}{a} = \varepsilon$$

aber die numerische Excentricität. Die vorige Gleichung nimmt jetzt die Form an

$$ON \cdot OT = OF^2 = OF_1^2. \tag{12}$$

Dieser Gleichung halber sagt man, die Strecke F_1F oder die Entfernung der Brennpunkte werde von Normale und Tangente in N und T harmonisch getheilt, oder man nennt auch F_1 und F, N und T harmonische Punkte.

Die harmonische Theilung lässt sich noch auf eine andere bemerkenswerthe Weise ausdrücken. Schreibt man nämlich (12) in der Form

$$\frac{ON}{OF} = \frac{OF}{OT}$$

und addirt man erst beide Seiten zur Einheit, subtrahirt dann beide Seiten von der Einheit und dividirt nunmehr mit dem zweiten Resultate in das erste, so ergiebt sich

$$\frac{OF + ON}{OF - ON} = \frac{OT + OF}{OT - OF}$$

oder

$$\frac{F_1O + ON}{OF - ON} = \frac{F_1O + OT}{OT - OF},$$

d. i.

$$(13) \qquad \frac{F_1N}{NF} = \frac{F_1T}{FT}.$$

Bezeichnet man also F_1N und NF_1, sowie F_1T und TF als die Abschnitte, in welche F_1F von den Punkten N und T getheilt wird, so sagt uns die Gleichung, dass das Theilungsverhältniss für beide Punkte denselben absoluten Werth hat; doch ist dasjenige zwischen F_1N und NF positiv, weil beide Strecken nach derselben Richtung gemessen werden, während F_1T und TF entgegengesetzte Richtung haben, weshalb das Verhältniss zwischen beiden Strecken negativ ist.

8. Leitstrahlen. Verbindet man (**Fig. 15**) einen Ellipsenpunkt P mit einem der Brennpunkte F und F_1, so heisst eine solche Verbindungslinie ein Leitstrahl oder Radius Vektor. Zieht man nun beide Leitstrahlen, sowie auch noch die Tangente und Normale für den Punkt P, so gilt die Gleichung (13), statt deren wir schreiben wollen

$$F_1N \cdot FT = F_1T \cdot NF.$$

Denkt man sich diese Gleichung mit dem Quadrate des halben Perpendikels von P auf die Hauptachse multiplicirt, so geht sie über in

$$\triangle F_1PN \cdot \triangle FPT = \triangle F_1PT \cdot \triangle NPF,$$

wo $\triangle$ die Dreiecksfläche bedeutet. Setzen wir nun $\angle F_1PN = \chi$, $\angle NPF = \psi$, so ist $\angle F_1PT = 90^0 + \chi$, $\angle FPT = 90^0 - \psi$ und es ist

$$\triangle F_1PN = \tfrac{1}{2}PF_1 \cdot PN \cdot \sin\chi, \quad \triangle FPT = \tfrac{1}{2}PF \cdot PT \cdot \cos\psi,$$
$$\triangle F_1PT = \tfrac{1}{2}PF_1 \cdot PT \cdot \cos\chi, \quad \triangle NPF = \tfrac{1}{2}PN \cdot PF \cdot \sin\psi,$$

und wenn man diese Werthe in die vorige Gleichung einsetzt, so heben sich die von P ausgehenden Linien alle weg und es bleibt übrig

$$\sin\chi \cos\psi = \cos\chi \sin\psi$$

oder

$$\sin\chi \cos\psi - \cos\chi \sin\psi = 0$$

oder

$$\sin(\chi - \psi) = 0,$$

aus welcher sich ergiebt $\chi = \psi$. Die Normale halbirt also den Winkel zwischen den Leitstrahlen, und die Tangente

halbirt den Winkel zwischen einem Leitstrahl und der Verlängerung des anderen. Dieser Satz gestattet ebenfalls eine leichte Konstruktion der Tangente.

9 Konstruktion der Ellipse mittels der Leitstrahlen. Wenn die Abscisse $x = OM$ gegeben ist, so kann man die Länge eines Leitstrahles leicht berechnen. Man hat nämlich

$$PF^2 = FM^2 + MP^2 = (x - e)^2 + y^2,$$

und wenn man aus Gleichung (1) den Werth von y^2 entnimmt und die Relation $e^2 = a^2 - b^2$ beachtet, so ergiebt sich

$$PF^2 = x^2 - 2ex + e^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 = a^2 - 2ex + \frac{e^2}{a^2} x^2,$$

und folglich

$$(14) \qquad PF = a - \frac{e}{a} x = a - \varepsilon x.$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich

$$PF_1^2 = F_1M^2 + MP^2 = (x + e)^2 + y^2$$

und sonach

$$(15) \qquad PF_1 = a + \frac{e}{a} x = a + \varepsilon x.$$

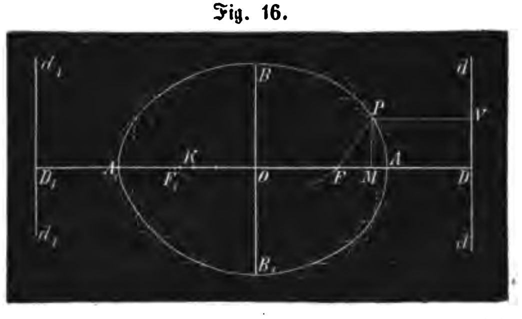
Durch Addition beider Gleichungen erhält man die einfache Gleichung

$$(16) \qquad PF + PF_1 = 2a,$$

welche den Satz ausdrückt: Die Summe der Leitstrahlen eines Ellipsenpunktes ist der Hauptachse gleich.

Sind demnach die beiden Achsen A_1A und B_1B gegeben, so kann man unzählig viele Ellipsenpunkte durch folgendes Verfahren bestimmen:

Fig. 16.



Zunächst setze man den Zirkel mit der Oeffnung $OA = a$ im Punkte B ein und schlage einen Kreisbogen, welcher die Hauptachse in den Brennpunkten F und F_1 schneidet. Ferner gebe man zwischen O und F_1 eine Anzahl Punkte an, wie K einer ist, und schlage um den einen Brennpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser A_1K, um den andern einen mit dem Halbmesser KA. Die Schnittpunkte beider Kreise sind Punkte der Ellipse.

10. Die Direktrix. Giebt man sich auf der Verlängerung der Hauptachse einen Punkt D (**Fig. 16**) an, so dass $OD = \frac{a}{\varepsilon}$ ist, so ist die senkrechte Entfernung PV des Ellipsenpunktes P von einer durch D gelegten, zur Achse senkrechten Geraden d

$$PV = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon} = \frac{PF}{\varepsilon},$$

oder es ist

$$\frac{PF}{PV} = \varepsilon. \tag{17}$$

Ein Punkt P beschreibt also eine Ellipse, wenn seine Entfernung von einem festen Punkte F dividirt durch seine Entfernung von einer festen Geraden immer einen konstanten Werth ε, kleiner als die Einheit, giebt.

Die Gerade d heisst die zum Brennpunkte F gehörige Direktrix; in entsprechender Weise gehört auch zu F_1 eine Direktrix d_1.

10. Bogenelement, Krümmungshalbmesser. Aus den beiden Gleichungen

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \text{ und } \tan\varphi = \frac{a^2y}{b^2x} \text{ (aus Nr. 5)}$$

erhält man für die Koordinaten x und y, ausgedrückt durch den Winkel φ, den die Normale mit der Hauptachse einschliesst, die Werthe

$$(18) \quad \begin{cases} x = \dfrac{a \cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon_2 \sin^2\varphi}} \\ y = \dfrac{a(1 - \varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

Haben nun x_1 und y_1, x und y wie in Nr. 5 die Bedeutung der Koordinaten zweier Punkte P_1 und P, welche wir einander immer näher und näher rücken lassen, bis sie endlich koincidiren, und bezeichnen wir mit ds das Stück Ellipsenbogen von P bis P_1, welches wir als geradlinig betrachten dürfen, so bildet dieses (oder die Sekante PP_1) mit der Hauptachse der Ellipse nach der linken Seite den Winkel $90^\circ - \varphi$ und seine Projektion auf der Hauptachse ist $x_1 - x = dx$; mithin besteht die Gleichung

$$\frac{dx}{ds} = \sin\varphi. \tag{19}$$

Bezeichnen nun φ und φ_1 die zu den Abscissen x und x_1 gehörigen Winkelwerthe und setzen wir der Kürze halber

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi} = \nabla, \quad \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi_1} = \nabla_1,$$

so ist

$$x = \frac{a \cos\varphi}{\nabla} \text{ und } x_1 = \frac{a \cos\varphi_1}{\nabla_1}$$

und

$$x_1 - x = \frac{a \cos\varphi}{\nabla_1} - \frac{a \cos\varphi}{\nabla} = a\,\frac{\nabla \cos\varphi_1 - \nabla_1 \cos\varphi}{\nabla\nabla_1}.$$

Wenn man Zähler und Nenner mit $\nabla \cos\varphi_1 + \nabla_1 \cos\varphi$ multiplicirt und dann im Zähler statt ∇^2 und ∇_1^2 wieder ihre Werthe setzt, so erhält man weiter

$$x_1 - x = a\,\frac{\nabla^2 \cos^2\varphi_1 - \nabla_1^2 \cos^2\varphi}{\nabla\nabla_1(\nabla \cos\varphi_1 + \nabla_1 \cos\varphi)}$$

oder

$$(\alpha) \ldots x_1 - x = a \frac{\cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi - \varepsilon^2(\sin^2\varphi\cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi\sin^2\varphi_1)}{\nabla\nabla_1(\nabla\cos\varphi_1 \times \nabla_1\cos\varphi)}$$

Diese Gleichung dividiren wir mit $\varphi - \varphi_1$, wobei wir aber unter φ und φ_1 nicht den in Graden gemessenen Winkel, sondern die auf einem Kreise mit dem Halbmesser 1 befindlichen entsprechenden Bogen verstehen, und lassen dann φ_1 mit φ, also auch x_1 mit x zusammenfallen. Die linke Seite der Gleichung (α) wird in Folge dessen

$$\frac{dx}{d\varphi},$$

wenn $d\varphi = \varphi - \varphi_1$ ist, und der Nenner der rechten Seite geht durch Gleichsetzung von φ_1 und φ in $2\nabla^3\cos\varphi$ über

Ferner ist der von ε freie Ausdruck des Zählers rechts

$$\cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi = (\cos\varphi_1 + \cos\varphi)(\cos\varphi_1 - \cos\varphi)$$
$$= 2(\cos\varphi_1 + \cos\varphi)\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}.$$

Erinnert man sich nun des Satzes, dass der Sinus eines sehr kleinen Winkels annäherungsweise gleich ist dem Bogen, der auf einem mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen Kreise zu diesem Winkel gehört, dass also das Verhältniss zwischen Sinus und Bogen sich mit dem allmäligen Verschwinden des letzteren der Einheit nähert, so kann man

$$\frac{2\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{\varphi-\varphi_1} = \frac{\sin\frac{\varphi-\varphi_1}{2}}{\frac{\varphi-\varphi_1}{2}} = 1$$

setzen, und das von ε freie Glied des Zählers der rechten Seite der Gleichung (α) geht daher nach Division mit $\varphi - \varphi_1$ und Gleichsetzung von φ_1 und φ über in

$$(\cos\varphi_1 + \cos\varphi)\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2} = 2\cos\varphi\sin\varphi.$$

Das mit dem Faktor ε^2 behaftete Glied von (α) ist in anderer Schreibweise

$$\varepsilon^2(\sin\varphi\cos\varphi_1 + \cos\varphi\sin\varphi_1)(\sin\varphi\cos\varphi_1 - \cos\varphi\sin\varphi_1)$$
$$= \varepsilon^2(\sin\varphi\cos\varphi_1 + \cos\varphi\sin\varphi_1)\sin(\varphi - \varphi_1).$$

Dividirt man hier mit $\varphi - \varphi_1$ und lässt φ_1 in φ übergehen, so wird

$$\frac{\sin(\varphi-\varphi_1)}{\varphi-\varphi_1} = 1$$

und das Glied geht in

$$2\,\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi$$

über. Sonach tritt an die Stelle der Gleichung (α) die folgende:

$$\frac{dx}{d\varphi} = a\frac{2\cos\varphi\sin\varphi - 2\varepsilon^2\sin\varphi\cos\varphi}{2\nabla^3\cos\varphi}$$

oder

$$(20) \qquad \frac{dx}{d\varphi} = \frac{a(1-\varepsilon^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}^3}.$$

Dividirt man diese Gleichung mit der Gleichung (19), so ergiebt sich das Resultat

$$(21) \qquad \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin 2\varphi}^3}.$$

Diese Gleichung drückt das Verhältniss aus zwischen einer verschwindend kleinen Zunahme des Ellipsenbogens $AP = s$ und der Zunahme des entsprechenden mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kreisbogens φ.

Wir können dem Quotienten $\frac{ds}{d\varphi}$ aber noch eine andere Bedeutung unterlegen.

Die beiden Normalen in P und P_1 schliessen einen Winkel ein, der durch $\varphi - \varphi_1 = d\varphi$ gemessen wird, und den verschwindend kleinen Bogen ds kann man als einen Kreisbogen betrachten, dessen Mittelpunkt derjenige Punkt Q ist, in welchem sich jene Normalen schneiden. Bezeichnen wir den Halbmesser QP mit ϱ, so ist

$$ds = \varrho\, d\varphi$$

und also

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Lässt man wieder P_1 mit P zusammenfallen, so wird Q der Krümmungsmittelpunkt für den Ellipsenpunkt P, ϱ der zugehörige Krümmungshalbmesser genannt und man hat zur Berechnung von ϱ die Gleichung

$$(22) \qquad \varrho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}^3}.$$

Dieser Werth lässt sich leicht konstruiren. Mit Berücksichtigung der ersten Gleichung (18) kann man zunächst schreiben

$$\varrho = \frac{(1-\varepsilon^2)\,x}{\cos\varphi\,(1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi)}.$$

Nun ist aber mit Berücksichtigung von Gleichung (11)

$$(1-\varepsilon^2)\,x = x - \varepsilon^2 x = OM - OM = NM$$

und also

$$\frac{(1-\varepsilon^2)x}{\cos\varphi} = \frac{NM}{\cos\varphi} = NP,$$

sonach

$$\varrho = \frac{NP}{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}.$$

Weiter gilt aber in dem Dreiecke NPF, wenn man, wie schon früher in **Fig. 15**, $\angle FPN = \psi$ setzt,

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{NF}{FP} = \frac{a\varepsilon - \varepsilon^2 x}{a - \varepsilon x} = \varepsilon,$$

also

$$\sin \psi = \varepsilon \sin \varphi$$

und

$$1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi = \cos^2 \psi,$$

so dass man schliesslich für den Krümmungshalbmesser ϱ den Werth erhält

$$\varrho = \frac{NP}{\cos^2 \psi}. \tag{23}$$

Fig. 17.

Man erhält demnach den Krümmungsmittelpunkt Q, indem man (**Fig. 17**) zuerst in N eine Senkrechte auf der Normalen errichtet, welche die Verlängerung des Leitstrahles in R schneidet, und dann in R eine Senkrechte auf PR errichtet, welche die Verlängerung der Normalen in dem gesuchten Punkte Q schneidet.

11. Konstruktion der Ellipse mit Hilfe von Krümmungskreisen. Sind von einer Ellipse eine grössere Anzahl von Punkten bekannt, so dass nur noch übrig bleibt, dieselben durch einen stetigen Zug zu verbinden, so kann man sich dazu der Krümmungskreise bedienen. Der Krümmungskreis eines Kurvenpunktes ist nämlich derjenige Kreis, welcher sich am engsten dem Laufe der Kurve in diesem Punkte anschliesst, und da alle Linien, die wir praktisch herstellen, eine gewisse Breite haben, so wird dieser Kreis in der Regel nicht blos durch den einen Punkt sondern noch durch einige benachbarte gehen. Man kann daher den Zirkel im Krümmungsmittelpunkte einsetzen und eine Anzahl Punkte durch den Krümmungskreis verbinden. Hat man auf diese Weise eine Anzahl Punkte irgend einer Kurve, die beiderseits vom Punkte A liegen (**Fig. 18**) durch den Krümmungskreis von A, und ebenso eine Anzahl Nachbarpunkte von B durch den Krümmungskreis von B verbunden, so bleibt nur noch die Verbindung beider Kreise selbst übrig. Diese kann aus freier Hand geschehen, man kann aber auch dazu Kreisbögen anwenden. Wir wollen annehmen AM, der Krümmungshalbmesser von A, sei kleiner als der zu B gehörige BN, und es wachsen diese Halbmesser von A nach B hin fortwährend, wie dies z. B. bei den Krümmungshalbmessern der Ellipse der Fall ist, wenn man vom Endpunkte der grossen Achse aus nach dem der kleinen Achse hingeht. Man nehme dann zwischen A und B einen Kurvenpunkt C an und ziehe dessen Normale. Auf dieser trage man $CD = AM$ und $CE = BN$ ab, verbinde D mit M, sowie E mit N, errichte dann im Halbirungspunkte von DM und ebenso in


Fig. 18.

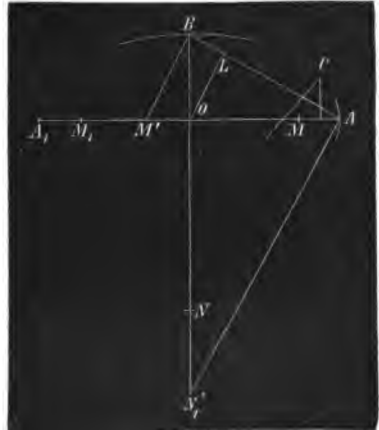


dem von EN eine Senkrechte, welche die Normale von C in den Punkten Q und R schneiden; endlich ziehe man noch die QM und NR. Von M aus schlägt man dann den durch A gehenden Krümmungskreis bis zur Linie QM; von dieser bis zur Normale CQ von C wird ein Kreis um Q mit dem Halbmesser QC geschlagen; von da bis zur Linie NR ein Kreis um R und endlich von der Linie NR aus der Krümmungskreis um N.

Zur Zeichnung eines Ellipsenquadranten ist es bei nicht zu grossem Maassstabe und gar zu grosser Verschiedenheit der Achsen in der Regel hinreichend, wenn man für die Endpunkte A und B der grossen und kleinen Achse die Krümmungsmittelpunkte M und N ermittelt und als dritten Punkt C kann man denjenigen annehmen, dessen Normale mit jeder der beiden Achsen einen Winkel von 45° einschliesst. Die Krümmungshalbmesser AM und BN erhält man am einfachsten aus Gleichung (22), wenn man dort $\varphi = 0$ und $\varphi = 90°$ setzt. Es ergiebt sich dann

$$AM = a(1 - \varepsilon^2) = \frac{b^2}{a} \text{ und } BN = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{a^2}{b},$$

Fig. 19.



und diese Werthe lassen sich sehr leicht konstruiren. Zieht man nämlich die Verbindungslinie der beiden Achsenenden A und B und errichtet auf dieser in A und B Senkrechte, von denen die erste die Verlängerung der Nebenachse in M', die zweite aber die Hauptachse in N_1' schneidet, so ist

$$AM = OM' \text{ und } BN = ON_1'.$$

Dieselbe Figur giebt uns auch leicht die Koordinaten des Punktes C. Fällt man nämlich von O auf AB die Senkrechte OL, so ist AL die Abscisse und LB die Ordinate dieses Punktes. Denn aus den Gleichungen (18) erhält man fü $\varphi = 45°$ die Werthe

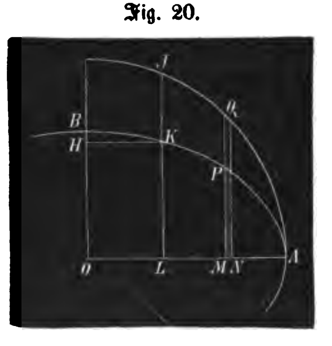
$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},\quad y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

welche mit AL und LB übereinstimmen. Hat man sich den Punkt C angegeben, so zieht man unter 45° gegen OA die Normale dieses Punktes und bestimmt auf ihr die Punkte Q und R wie oben angegeben.

12. Quadratur der Ellipse. Sind M und N zwei sehr nahe an einander liegende Punkte von OA, so ist der über dem Abscissenelemente MN stehende, von den Ordinaten in M und N eingeschlossene Streifen der Ellipsenfläche annäherungsweise als ein Rechteck zu betrachten und gleich $MP \cdot MN$. Dagegen ist der über MN stehende Streifen der Fläche des mit dem Halbmesser

$OA = a$ beschriebenen Kreises gleich $MQ \cdot MN$. Nun ist aber $MP : MQ = b : a$, mithin auch der Ellipsenstreifen gleich den Kreisstreifen, multiplicirt mit dem Bruche $\frac{b}{a}$. Denken wir uns nun die ganze Strecke LA in sehr viele solche kleine Theile, wie MN, zerlegt und die sämmtlichen Ordinaten in den Theilpunkten gezogen, so gilt für alle über demselben Abschnitte von OA stehende Flächenstreifen die obige Relation. Denken wir uns dann die Streifen der Ellipsenfläche eines theils, die der Kreisfläche anderntheils addirt, so muss die Relation auch für die Summen gelten. Diese Summen stimmen aber um so genauer mit den Flächen ALK und ALJ überein, je grösser man die Anzahl der Abschnitte auf LA macht. Daher schliessen wir

Fig. 20.



$$\text{Ellipsenfläche } ALK = \frac{b}{a} \cdot \text{Kreisfläche } ALJ.$$

Nun ist aber die Kreisfläche $ALJ =$ Sektor $AOJ - \triangle OLJ$, und wenn man mit Arccos $\frac{x}{a}$ den Bogen auf einem Kreise mit dem Halbmesser 1 bezeichnet, dessen Cosinus $\frac{x}{a}$ ist (also, wenn $OL = x$, den Bogen dessen Centriwinkel JOL), so ist der Sektor $= \frac{1}{2} a^2 \operatorname{Arccos} \frac{x}{a}$ und das Dreieck $= \frac{1}{2} x \cdot LJ$, mithin (weil $\frac{b}{a} \cdot LJ = LK = y$)

$$(24) \qquad \text{die Ellipsenfläche } ALK = \tfrac{1}{2} ab \operatorname{Arccos} \frac{x}{a} - \tfrac{1}{2} xy$$

Fügt man das Rechteck $OLKH = xy$ hinzu, so erhält man

$$(25) \qquad \text{die Ellipsenfläche } OAKH = \tfrac{1}{2} ab \operatorname{Arccos} \frac{x}{a} + \tfrac{1}{2} xy.$$

Für den Quadranten ist $x = 0$, also $\operatorname{Arccos} \frac{x}{a} = \operatorname{Arccos} 0 = \frac{\pi}{2}$, mithin die Fläche $= \frac{1}{4} ab\pi$.

§. 5.

Die Hyperbel.

1. Aus der Gleichung der Hyperbel

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, wie schon erwähnt, zunächst ersichtlich, dass $x^2 > a^2$ ist, dass also in dem von den zwei parallelen Geraden

$$x = \pm a$$

(Fig. 8, S. 13) eingeschlossenen Flächenstreifen kein Kurvenpunkt liegt. Aus (1) ergiebt sich aber weiter

$$(2) \qquad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

und wenn man damit die Ordinate

$$(3) \qquad y_1 = \pm \frac{b}{a} x$$

vergleicht und die Ordinatenwerthe für das obere Vorzeichen mit einem Striche, die für des untern aber mit zwei Strichen bezeichnet, so findet sich

$$y'_1 - y' = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

oder

Fig. 21.

$$(4) \qquad y'_1 - y' = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

und derselbe Werth ergiebt sich auch für die Differenz $y'' - y''_1$. Ist nun $A_1O = OA = a$ und $OB = B_1O = b$ und konstruirt man mit B_1B und A_1A als Seiten das Parallelogramm $CDD'C'$, so sind die beiden Diagonalen $D'C$ und DC' die durch die Gleichungen (3) ausgedrückten Geraden. Ist ferner $OM = x$, und P_1Q_1 parallel zu BB_1, so ist

$$MP_1 = y'_1, \; MQ_1 = y''_1; \; MP = y', \; MQ = y'',$$

also

$$y'_1 - y' = PP_1 \text{ und } y'' - y''_1 = Q_1Q$$

und demnach ist

$$PP_1 = Q_1Q.$$

Für $x = \infty$ wird diese Differenz $= 0$, die Hyperbel schliesst sich also mehr und mehr an die zwei Geraden an, welche man ihre Asymptoten nennt.

Da zufolge (4) diese Differenz immer positiv ist, so liegt die Hyperbel ganz innerhalb der beiden von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkel, welche die Punkte A und A_1 enthalten.

Da die Richtung der Ordinatenachse ganz willkürlich gewählt worden ist, so liegt in der Gleichung $PP_1 = Q_1Q$ der allgemeine Lehrsatz:

Die Abschnitte, welche auf einer beliebigen Geraden von der Hyperbel und ihren Asymptoten gebildet werden, sind gleich gross.

Aus diesem Satze ergiebt sich die folgende

2. Konstruktion der Hyperbel, wenn ein Punkt P derselben und die beiden Asymptoten gegeben sind: Man ziehe durch P beliebige Gerade, die Schnittpunkte mit den Asymptoten nenne man P_1 und Q_1 und mache $Q_1Q = PP_1$; dann

gehören die so erhaltenen Punkte Q alle der Hyperbel an. Wenn man übrigens einige neue Punkte zu dem ursprünglichen Punkte P erhalten hat, so thut man gut, das Verfahren von diesen neuen Punkten aus weiter fortzuführen.

3. Gleichung (1) zeigt uns, dass jede zur Achse der x parallele Sehne von der y-Achse halbirt wird und umgekehrt jede zur y-Achse parallele durch die x-Achse. Beide Koordinatenachsen sind deshalb konjugirte Durchmesser. Wegen der willkürlichen Wahl der y-Achse (Nr. 3 des §. 3) giebt es zu jedem Durchmesser einen konjugirten.

Erwähnung verdient noch der Umstand, dass von den zwei konjugirten Durchmessern immer nur der eine von der Hyperbel geschnitten wird.

Durch ganz dieselben Betrachtungen, die in Nr. 2 des vorigen Paragraphen angestellt worden sind, ergiebt sich, dass es auch bei der Hyperbel zwei rechtwinklige konjugirte Durchmesser giebt. Der Hilfskreis um O muss aber hier mit einem Halbmesser beschrieben werden, der grösser ist als a.

Für diese rechtwinkligen konjugirten Durchmesser als Koordinaten-Achsen gilt ebenfalls die Gleichung (1) und zwar heissen die Werthe von $2a$ und $2b$ für diesen Fall, wie bei der Ellipse, die Haupt- und Nebenachse oder auch die reelle und imaginäre Achse, weil bei jener zwei Schnittpunkte mit der Kurve existiren, bei dieser aber nicht, oder weil, wie man sagt, die Schnittpunkte hier imaginär sind. Für $x = 0$ erhält man nämlich

$$y = \pm \sqrt{-b^2}.$$

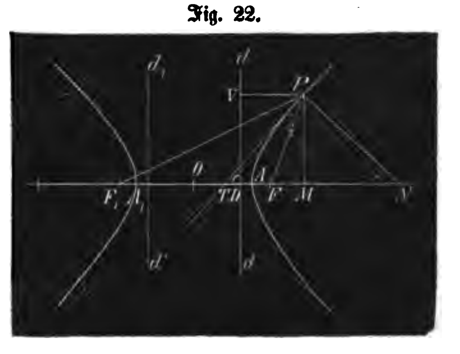
4. Tangenten und Normalen der Hyperbel. Sind P und P_1 zwei einander sehr nahe liegende Punkte der Kurve, so lassen sich genau die Rechnungen der Nr. 5 des vorigen Paragraphen wiederholen, nur hat man überall $-b^2$ an die Stelle von $+b^2$ zu setzen. Daher erhält man auch für den Winkel τ, welchen die Tangente PT des Hyperbelpunktes P mit der x-Achse nach rechts hin bildet, entsprechend den Gleichungen (5) und (6) des vorigen Paragraphen, die Formel

$$(5) \qquad \tan\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

und für den Winkel $\varphi = 90^\circ - \tau$, den die Normale PN nach links hin mit derselben Achse einschliesst, hat man die Gleichung

$$(6) \qquad \tan\varphi = \frac{a^2 y}{b^2 x}$$

Fig. 22.



Die Stücke TM oder die Subtangente und MN oder die Subnormale haben die Werthe

$$TM = y \tan \varphi = \frac{a^2 y^2}{b^2 x} \text{ und } MN = y \cot \varphi = \frac{b^2 x}{a^2}.$$

Ferner erhält man

$$OT = x - TM = \frac{a^2}{x} \text{ und } ON = x + MN = \frac{(a^2 + b^2)x}{a^2};$$

und also ist

$$OT \cdot ON = a^2 + b^2.$$

5. Brennpunkte. Giebt man sich nun auf der Hauptachse die Punkte F und F_1 an, so dass

$$F_1 O = OF = \sqrt{a^2 + b^2} = e,$$

d. h. gleich der Entfernung der Endpunkte der Haupt- und Nebenachse ist, so heissen F_1 und F die Brennpunkte der Hyperbel, e wird die lineare Excentricität und der unechte Bruch $\frac{e}{a} = \varepsilon$ die numerische Excentricität genannt. Die Verbindungslinien des Punktes P mit F_1 und F heissen die Leitstrahlen von P.

Wie bei der Ellipse wird also auch bei der Hyperbel die Entfernung der beiden Brennpunkte durch Normale und Tangente harmonisch getheilt. Nur besteht der Unterschied, dass bei der Hyperbel die Tangente zwischen den beiden Brennpunkten die Hauptachse schneidet, während bei der Ellipse die Normale dies thut.

Die Beweisführung der Nr. 8 des vorigen Paragraphen bleibt daher in voller Kraft, wenn man N und T (Normale und Tangente) vertauscht. Der Schlusssatz lautet dann: Die Tangente der Hyperbel halbirt den Winkel zwischen den Leitstrahlen des Berührungspunktes und die Normale halbirt den Nebenwinkel.

Wie man mit Hilfe dieses Satzes die Tangente konstruiren kann, bedarf keiner Erläuterung.

Auch die Berechnung der Leitstrahlen ist analog der Rechnung in Nr. 9 des vorigen Paragraphen. Es ist nämlich

$$PF^2 = FM^2 + MP^2 = (x - e)^2 + y^2$$
$$= x^2 - 2ex + e^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 = a^2 - 2ex + \frac{e^2}{a^2} x^2$$

und folglich

$$PF = \varepsilon x - a,$$

nicht $a - \varepsilon x$, weil dieser Werth (zufolge $\varepsilon > 1$ und $x > a$) negativ sein würde.

Auf dieselbe Art findet man

$$PF_1 = \varepsilon x + a.$$

Mithin ist

$$PF_1 - PF = 2a.$$

D. h.: Die Differenz der Leitstrahlen einer Hyperbel ist gleich der Hauptachse. Man kann daher beliebig viele Punkte einer Hyperbel konstruiren, wenn man auf der

Verlängerung der Strecke F_1F sich Punkte K angiebt und um den einen Brennpunkt mit A_1K, um den andern mit AK als Halbmesser einen Kreis schlägt; die Schnittpunkte beider Kreise sind Hyperbelpunkte.

6. Direktrix. Trägt man auf der Hauptachse der Hyperbel in der Richtung von O nach A das Stück $OD = \frac{a}{\varepsilon}$ ab und errichtet in D eine Senkrechte d, so ist die senkrechte Entfernung des Hyperbelpunktes P von derselben

$$VP = x - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{PF}{\varepsilon}$$

und also ist

$$\frac{PF}{VP} = \varepsilon.$$

Ein Punkt P beschreibt also eine Hyperbel, wenn seine Entfernung von einem festen Punkte F, dividirt durch seine Entfernung von einer festen Geraden d immer gleich ist derselben konstanten Zahl, die grösser als die Einheit ist.

Die Gerade d heisst die dem Brennpunkte F konjugirte Direktrix; auf der andern Seite von O liegt symmetrisch zu d die dem Punkte F_1 konjugirte, d_1.

7. Bogenelement, Krümmungshalbmesser. Aus den Gleichungen

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \text{ und } \tan\varphi = \frac{a^2y}{b^2x}$$

erhält man

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}} \\ y = \dfrac{a(\varepsilon^2 - 1)\sin\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

Bedeutet nun wieder ds das Bogenelement, d. h. das verschwindend kleine Stück Hyperbelbogen, welches zwischen den Nachbarpunkten P und P_1 liegt, deren Koordinaten x, y und x_1, y_1 sind, so ist, wie in Nr. 10 des vorigen Paragraphen

$$(8) \qquad \frac{dx}{ds} = \sin\varphi.$$

Die Berechnung von dx erfolgt auf dieselbe Weise wie dort, nur dividiren wir nicht mit $\varphi - \varphi_1$, sondern mit $\varphi_1 - \varphi$, weil dem grösseren Werthe x_1 bei der Hyperbel auch ein grösserer Werth φ_1 angehört. Bezeichnet man den zur Grenze Null abnehmenden Werth der Differeng $\varphi_1 - \varphi$ mit $d\varphi$, wobei φ im Bogen-, nicht im Winkelmaass ausgedrückt zu denken ist, so erhält man die Formel

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)\sin\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}^3},$$

entsprechend der Formel (20) des vorigen Paragraphen, und daraus und aus (8) ergiebt sich weiter für den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi}$$

die Gleichung

$$(9) \qquad \varrho = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}^3}.$$

Dafür kann man auch mit Berücksichtigung der ersten Gleichung (7) schreiben.

$$\varrho = \frac{(\varepsilon^2 - 1)\, x}{\cos\varphi\, (1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)}.$$

Es ist aber

$$(\varepsilon^2 - 1)\, x = \varepsilon^2 x - x = ON - OM = MN$$

und also

$$\frac{(\varepsilon^2 - 1)\, x}{\cos\varphi} = \frac{MN}{\cos\varphi} = NP,$$

mithin

$$\varrho = \frac{NP}{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}.$$

Es ist aber weiter, wenn man $\angle FPN = \psi$ setzt

$$\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{FN}{PF} = \frac{\varepsilon^2 x - a\varepsilon}{\varepsilon x - a} = \varepsilon,$$

also

$$\sin\psi = \varepsilon \sin\varphi$$

und

$$\cos^2\psi = 1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi,$$

so dass die Gleichung für den Krümmungshalbmesser genau dieselbe Form wie bei der Ellipse annimmt (Schluss der Nr. 11 des vorigen Paragraphen):

$$\varrho = \frac{NP}{\cos^2\psi}.$$

Es lässt sich daher der Krümmungsmittelpunkt auch durch das bei der Ellipse auseinander gesetzte Verfahren finden.

Was schliesslich die Verbindung bereits gefundener Hyperbelpunkte anlangt, so kann man sich auch hierzu der Krümmungskreise bedienen. Der Krümmungshalbmesser für den Endpunkt der Hauptachse, also für $\varphi = 0$, ist

$$\varrho = a(\varepsilon^2 - 1) = \frac{b^2}{a}$$

und wird ebenso gefunden, wie bei der Ellipse. Da die Kurve sich im weitern Fortgange mehr und mehr einer geraden Linie nähert, nämlich der Asymptote, so wird man sich in der Regel damit begnügen können, eine Anzahl Punkte in der Nähe von A durch den Krümmungskreis zu verbinden, der zu A gehört. Will man noch mehr Krümmungskreise anwenden, so kann die allgemeine Anleitung in §. 4, Nr. 11 auch hier als Richtschnur dienen.

§. 6.

Die Parabel.

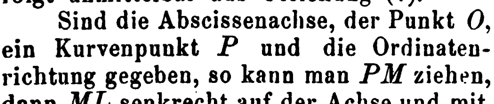
1. Zieht man zwei parallele Sehnen einer Parabel, nimmt ihre Halbirungslinie als Achse der x, die Richtung der Sehnen als Richtung der y und den Anfangspunkt O der Koordinaten im Schnittpunkte der x-Achse mit der Kurve an, so ist dem Frühern (§. 3, Nr. 8) zufolge

$$y^2 = px \tag{1}$$

die Gleichung der Parabel.

2. Konstruktion der Parabel. Sind (Fig. 23) die Abscissenachse OX, der Punkt O, die Länge p und die Ordinatenrichtung gegeben, so findet man die zur Abscisse $OM = x$ gehörige Ordinate y wie folgt: Man trage auf der Verlängerung von OM die Strecke $MQ = p$ ab, schlage über OQ als Durchmesser einen Halbkreis und errichte in M eine Senkrechte auf der Achse, welche den Halbkreis in L schneidet; ML ist die gesuchte Ordinate, und wenn man diese Strecke auf der Ordinatenrichtung auf beiden Seiten von M aufträgt, so erhält man die Parabelpunkte P und P_1. Die Richtigkeit der Konstruktion folgt unmittelbar aus Gleichung (1).

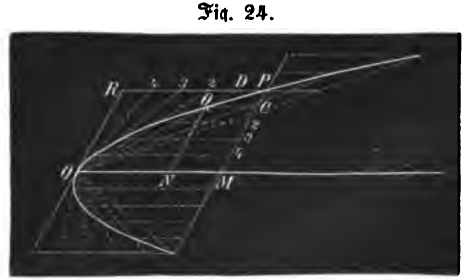
Fig. 23.



Sind die Abscissenachse, der Punkt O, ein Kurvenpunkt P und die Ordinatenrichtung gegeben, so kann man PM ziehen, dann ML senkrecht auf der Achse und mit MP gleich lang errichten, hierauf den rechten Winkel OLQ zeichnen, worauf $MQ = p$ und also das vorher beschriebene Verfahren zur Auffindung weiterer Kurvenpunkte anwendbar ist.

Statt dessen kann man auch das Parallelogramm $OMPR$ zeichnen, worauf man PM und PR in gleichviele gleiche Theile theilt und die Theilpunkte von P aus numerirt. Durch einen Theilpunkt C auf PM zieht man dann eine Parallele zur Achse, während man den mit gleicher Nummer versehenen Theilpunkt D auf PR mit O verbindet. Beide Linien schneiden sich in einem Parabelpunkte Q. Zieht man nämlich QN parallel PM und setzt $ON = x$, $NQ = y$, so ist

Fig. 24.



$$\frac{y}{x} = \frac{MP}{RD} \text{ oder } y = \frac{MP}{RD} \cdot x$$

und

$$\frac{MC}{MP} = \frac{RD}{OM} \text{ oder } y = \frac{RD \cdot MP}{OM},$$

und wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt, so ergiebt sich

$$y^2 = \frac{MP^2}{OM} \cdot x,$$

die Gleichung einer Parabel.

In **Fig. 24** ist auch noch angedeutet, wie man weitere Parabelpunkte unterhalb OM und jenseits MP finden kann.

Fig. 25.

3. Nimmt man auf der Abscissenachse das Stück $OK = k$ beliebig an und errichtet in K eine Senkrechte auf der Achse, so schneidet dieselbe die Parabel in zwei Punkten P und P'. Die Koordinaten eines derselben, etwa des P, mögen $OM = x$ und $MP = y$ sein. Setzt man dann $\angle PMK = \alpha$, so ist

$$\cos \alpha = \frac{MK}{MP} = \frac{k - x}{y},$$

also

$$x = k - y \cos \alpha,$$

und die Einsetzung dieses Werthes in die Gleichung (1) giebt die neue Gleichung

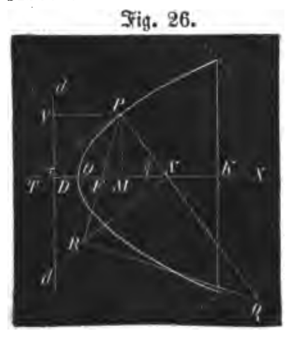
$$y^2 + py \cos \alpha = pk,$$

aus der man

$$y = -\tfrac{1}{2} p \cos \alpha \pm \sqrt{pk + \tfrac{1}{4} p^2 \cos^2 \alpha}$$

erhält. Ziehen wir jetzt eine zur x-Achse parallele Gerade $O'X'$, so dass (**Fig. 25**) dieselbe um $MS = -\tfrac{1}{2} p \cos \alpha$, in Richtung der y gemessen, von der alten x-Achse absteht, so ist $SP = P_1S_1$ (wenn beide parallel sind) und also auch $TP = P_1T$. Da der Werth $-\tfrac{1}{2} p \cos \alpha$ von $k = OK$ ganz unabhängig ist, so halbirt die Gerade $O'X'$ alle auf ihr senkrechte Sehnen der Parabel. Wir nennen $O'X'$ kurz die Achse der Parabel und wollen in Zukunft dieselbe als x-Achse, die Ordinaten senkrecht dazu annehmen. Der Schnittpunkt O mit der Parabel wird auch der Scheitel genannt. Die Form der Gleichung (1) bleibt auch für diese Koordinaten dieselbe, weil eben diese Form von der Wahl der Richtung der y unabhängig und für die Parabel charakteristisch ist.

Fig. 26.



4. Tangente und Normale. Es seien die Punkte P_1 und P mit den Koordinaten x_1, y_1 und x, y gegeben; dann ist zufolge (1)

$$y_1^2 - y^2 = p(x_1 - x)$$

und folglich

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{p}{y_1 + y}.$$

Lässt man x_1 mit x zusammenfallen und setzt den Grenzwerth von

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy}{dx},$$

wie im vorigen Paragraphen, so erhält man die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}.$$

Da der links stehende Differentialquotient die trigonometrische Tangente des Winkels τ ist, den die geometrische Tangente an den Kurvenpunkt P mit der x-Achse einschliesst (Nr. 5 des §. 4), so hat man

$$\tan \tau = \frac{p}{2y}. \tag{2}$$

Errichtet man (Fig. 26) in P senkrecht auf der Tangente PT die Normale PN, welche die x-Achse unter dem Winkel $\varphi = 90^0 - \tau$ schneidet, so ist ferner

$$\tan \varphi = \frac{2y}{p}. \tag{3}$$

Was die Subtangente TM betrifft, so ist dieselbe $= y \tan \varphi$ oder

$$TM = \frac{2y^2}{p} = 2x \tag{4}$$

oder die Subtangente ist der doppelten Abscisse gleich. Dies gestattet eine einfache Konstruktion der Tangente.

Die Subnormale $MN = y \tan \tau$ ist

$$MN = \frac{p}{2}, \tag{5}$$

also konstant, und für die Strecke TN erhält man

$$TN = TM + MN = 2x + \frac{p}{2}.$$

Halbirt man nun TN im Punkte F, so ist

$$TF = x + \frac{p}{4}$$

und weil $TM = 2x$, also $TO = x$ ist, so ist

$$OF = TF - TO = \frac{p}{4}. \tag{6}$$

Der Halbirungspunkt von TN ist also ein fester Punkt; er heisst der Brennpunkt der Parabel, die Strecke $OF = \frac{1}{4} p$ wird die Brennweite genannt.

5. Leitstrahl und Direktrix. Verbindet man einen Parabelpunkt P mit dem Brennpunkte F, so nennt man die Verbindungslinie FP den Leitstrahl des Punktes P und es ist

$$FP^2 = FM^2 + MP^2 = \left(x - \frac{p}{4}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{4}\right)^2,$$

also

$$FP = x + \frac{p}{4}. \tag{7}$$

3*

Es ist mithin $FP = TF$, und es bildet demnach die Tangente TP gleiche Winkel mit der Achse und dem Leitstrahl: $\angle FTP = \angle TPF$.

Trägt man andererseits über O hinaus die Strecke $OD = FO = \frac{p}{4}$ ab und errichtet in D auf der Achse eine senkrechte d, die Direktrix genannt, so ist der senkrechte Abstand PV des Punktes P von der Direktrix $= \frac{p}{4} + x = FP$, d. h.

Ein Punkt beschreibt eine Parabel, wenn sein Abstand von einer festen Geraden, der Direktrix, immer gleich ist seiner Entfernung von einem festen Punkte, dem Brennpunkte.

Darauf gründet sich folgende Konstruktion der Parabel, wenn D und F gegeben sind. Zunächst ist der Halbirungspunkt O von DF ein Punkt der Parabel. Ferner nehme man auf der Achse von O nach D hin und drüber hinaus beliebige Punkte an, wie K einer ist; in jedem solchen Punkte K errichte man eine Senkrechte und schlage um F als Mittelpunkt mit dem Halbmesser DK einen Kreisbogen, der die Senkrechte in zwei Kurvenpunkten schneidet.

6. Krümmungshalbmesser. Aus den zwei Gleichungen

$$y^2 = px \text{ und } \tan\varphi = \frac{2y}{p}$$

ergeben sich die Formeln

$$x = \frac{p}{4}\tan^2\varphi \text{ und } y = \frac{p}{2}\tan\varphi. \tag{8}$$

Für das Bogenelement ds hat man wieder die allgemeine Gleichung

$$ds = \frac{dx}{\sin\varphi},$$

und wenn P_1 und P zwei Punkte mit den Koordinaten x_1, y_1 und x, y sind, so ist

$$x_1 - x = \frac{p}{4}(\tan^2\varphi_1 - \tan^2\varphi)$$

$$= \frac{p}{4} \cdot \frac{\sin^2\varphi_1 \cos^2\varphi - \cos^2\varphi_1 \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi}$$

oder

$$x_1 - x = \frac{p}{4} \cdot \frac{\sin(\varphi_1 + \varphi)\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi}.$$

Dividirt man mit $\varphi_1 - \varphi$ und lässt φ_1 in φ übergehen, so ergiebt sich wegen

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\varphi_1 - \varphi} = 1, \text{ für } \varphi_1 = \varphi,$$

die Gleichung

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{p}{4} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{p}{2} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit der obigen für ds, so ergiebt sich

$$(9) \qquad \frac{ds}{d\varphi} = \varrho = \frac{p}{2 \cos^3 \varphi}.$$

Nun ist aber $MN = \frac{p}{2}$, mithin

$$\frac{p}{2 \cos \varphi} = PN,$$

also

$$(10) \qquad \varrho = \frac{PN}{\cos^2 \varphi}.$$

Da aber F der Halbirungspunkt von TN und $FP = FT = FN$ ist, so sind die Winkel, welche die Normale mit der Achse und dem Leitstrahle FP bildet, gleich gross und φ ist also gleich $\angle FPN$.

Wir haben daher für die Konstruktion des Krümmungshalbmessers und Krümmungsmittelpunktes auch bei der Parabel wieder dieselbe Regel, die wir schon bei der Ellipse (§. 4, Seite 25 oben) und bei der Hyperbel kennen gelernt haben. Nämlich in N errichtet man auf PN eine Senkrechte, welche den Leitstrahl in R schneidet, und in R errichtet man auf FP eine Senkrechte, welche die Normale im Krümmungsmittelpunkte Q schneidet.

Für $\varphi = 0$, also für den Punkt O, ist $\varrho = \frac{p}{2}$ oder gleich der doppelten Brennweite.

Rücksichtlich der Verbindung einzelner Parabelpunkte durch Bögen von Krümmungskreisen ist auf das bei der Ellipse Gesagte zu verweisen (§. 4, S. 25 u. 26).

§. 7.

Genauere Bestimmung der gestellten Aufgabe. Gestalt und Grösse der Erde. Sphärische Koordinaten.

1. Dass die Erde die Gestalt einer Kugel besitzt, ist eine Wahrheit, die schon den Pythagoräern geläufig war und für welche später Aristoteles die meisten derjenigen populären Gründe angeführt hat, die wir noch jetzt in den Lehrbüchern der mathematischen Geographie antreffen. Bei den Astronomen des Alterthums galt dieser Satz als unbestritten und auch im Mittelalter ist er, namentlich gestützt durch das Ansehen des Aristoteles, Gemeingut der mathematisch Gebildeten geblieben, wenn auch durch den Indienfahrer Kosmas (im 6. Jahrhundert) die Vorstellung von einer tafelförmigen Gestalt unseres Planeten, die dann durch gezwungene Deutungen einzelner Bibelstellen gestützt wurde, in vielen, namentlich geistlichen Kreisen Eingang fand.

2. In Zeit von einem Sterntage dreht sich die Erde einmal in der Richtung von West nach Ost um einen Durchmesser, den

wir die Erdachse nennen; die beiden Endpunkte dieses Durchmessers sind die Pole der Erde, Nord- und Südpol.

In Folge dieser Bewegung scheint sich in derselben Zeit das scheinbare Himmelsgewölbe um eine Achse zu drehen, welche die Verlängerung der Erdachse bildet und Weltachse genannt wird. Ihre Schnittpunkte mit dem scheinbaren Himmelsgewölbe sind die Weltpole.

Schneidet man die Erd- (oder Himmels-) Kugel durch eine Ebene, welche durch beide Pole geht, so heisst die kreisförmige Durchschnittslinie ein Meridian. Schneidet man die Kugel dagegen durch eine zur Achse senkrechte Ebene, so erhält man als Schnittfigur einen Parallelkreis, dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt; geht der Schnitt durch den Kugelmittelpunkt, so heisst der betreffende Kreis der Aequator.

3. Denkt man sich auf der Kugelfläche den Aequator angegeben, theilt ihn dann, etwa in 360 Grad oder noch weiter, und legt die Meridiane durch die einzelnen Theilpunkte, theilt hierauf einen der Meridiane ebenfalls in Grade oder noch kleinere Theile und legt Parallelkreise durch die einzelnen Thleilpunkte, so bedeckt man die Kugeloberfläche mit einem Netze von Kreislinien, mit dessen Hülfe es möglich ist, auf einfache Weise die Lage eines Punktes P auf der Kugelfläche zu bestimmen.

Geht man nämlich vom Punkte P aus auf dem Meridiane, der durch diesen Punkt gelegt ist, bis zu dem Punkte M, in welchem dieser Meridian den Aequator schneidet, so nennt man den durchlaufenen Kreisbogen PM, in Winkelmaass ausgedrückt, die Breite des Punktes P. Je nachdem P von M aus nach Nord oder Süd liegt, bezeichnet man die Breite als nördliche oder als südliche; erstere versieht man auch mit dem Zeichen $+$, letztere dagegen mit dem Zeichen $-$.

Zur vollständigen Bestimmung der Lage von P ist noch die Angabe des Meridianes nöthig. Zu dem Zwecke wird auf dem Aequator ein Punkt O fest angenommen und der Aequatorbogen OM angegeben. Dieser Bogen heisst die Länge des Punktes P. Statt auf dem Aequator kann man die Länge auch auf dem durch P gehenden Parallelkreise messen. Zu dem Ende legt man durch O den Meridian, den sogenannten ersten Meridian, welcher den erwähnten Parallelkreis im Punkte N schneidet; dann ist NP ebenfalls die Länge von P.

Ueber die Wahl des ersten Meridianes auf der Erdoberfläche herrscht leider keine Uebereinstimmung, es sind vielmehr zur Zeit hauptsächlich drei erste Meridiane im Gebrauch, der durch Ferro, der durch Greenwich und der durch Paris. Welchen Meridian man auch annehmen mag, so zählt man doch in der Regel immer die Länge von 0° bis 180° nach Osten und ebenso von 0° bis 180° nach Westen.

Der westlichste unter diesen Anfangsmeridianen ist der von Ferro. Derselbe geht nicht genau durch die Insel Ferro in der Gruppe der Canaren, sondern läuft ein Stück östlich bei derselben vorbei. In Wirklichkeit ist dieser Meridian durch die Angabe be-

stimmt, dass derselbe 20 Längengrade westlich von dem durch die Pariser Sternwarte gehenden liegt, so dass der Pariser Meridian die eigentliche Grundlage bildet. Der früher bei den Geographen ziemlich allgemein übliche Gebrauch, die Längen vom Meridiane von Ferro aus zu zählen, rührt von einem Dekrete des Königs Ludwig XIII. von Frankreich vom Jahre 1630 her; gegenwärtig sind es hauptsächlich die Deutschen, die demselben noch huldigen.

Bei den Franzosen ist der durch die Pariser Sternwarte gehende Meridian als erster im Gebrauch.

Bei den Engländern und überhaupt bei den Seefahrern ist der Meridian von Greenwich, $2^0\ 20'\ 9''$ westlich von Paris, als Anfang üblich.

Auf der Himmelskugel bestimmt man die Lage eines Punktes in ganz derselben Weise; man nennt aber den auf dem Meridian gemessenen Bogen PM nicht die Breite, sondern die Deklination (Abweichung) und der Aequatorbogen OM heisst die Rektascension oder Geradaufsteigung. Als Anfangspunkt für die letztere nimmt man den Frühlingspunkt, d. h. denjenigen Schnittpunkt der Ekliptik (scheinbaren jährlichen Sonnenbahn) und des Aequators, in welchem die Sonne im Frühlingsanfange (21. März) steht, und zwar zählt man die Rektascension in der Richtung nach Osten von 0^0 bis 360^0.

Eine ganz analoge Bestimmung des Ortes am Himmel geschieht mittels des Kreises, welchen die Sonne bei ihrer scheinbaren jährlichen Bewegung beschreibt, der Ekliptik. Errichtet man auf der Ebene der Ekliptik, und zwar in deren Mittelpunkte, einen senkrechten Durchmesser, welcher die Himmelskugel in zwei Punkten schneidet, so nennt man diese die Pole der Ekliptik, und wenn man durch diese beiden Pole und einen gegebenen Punkt P der Kugelfläche eine Ebene legt, so schneidet dieselbe die Kugelfläche in einem Kreise, auf welchem man den Bogen von P bis zum Schnittpunkte M' mit der Ekliptik als die Breite von P bezeichnet. wogegen der Bogen der Ekliptik vom Frühlingspunkte O bis zum Punkte M die Länge heisst. Letztere wird von O aus nach Osten von 0^0 bis 360^0 gezählt.

Länge und Breite, sowie auch Rektascension und Deklination eines Punktes nennt man seine sphärischen Koordinaten.

Da die Erde sich in 24 Sternstunden einmal um ihre Achse dreht, so haben zwei Orte, deren Längen um 15^0 differiren, einen Zeitunterschied von einer Stunde. Man giebt deshalb die Länge auch oftmals in Zeit, statt in Gradmaass an, wobei

1 Stunde $= 15^0$, 1 Min. Zeit $= 15'$ und 1 Sek. Zeit $= 15''$

Gradmaass ist. In gleicher Weise giebt man auch am Himmel die Rektascension oft in Zeit an.

4. Wenn der Erdhalbmesser r bekannt ist, so ist der Umfang des Aequators

$$(1) \qquad a = 2r\pi,$$

wo $\pi = 3{,}1415927$ ist, und eben so gross ist der Umfang eines jeden grössten Kreises, d. h. jedes Kreises, dessen Ebene durch

den Kugelmittelpunkt geht. Die Länge eines Bogens auf einem solchen Kreise, dessen Grösse, im Gradmaass ausgedrückt $= \varphi^0$ ist, ergiebt sich also durch die Formel

$$(2) \qquad l = \frac{a\varphi}{360} = \frac{r\pi\varphi}{180}$$

Der Halbmesser r_1 eines Parallelkreises von φ^0 Breite ist

$$(3) \qquad r_1 = r \cos \varphi.$$

Sind ferner φ_1 und φ die geographischen Breiten zweier Punkte P_1 und P, λ_1 und λ ihre Längen und legt man durch beide einen grössten Kugelkreis, so findet man den zwischen P_1 und P gelegenen Bogen ψ dieses Kreises, in Gradmaass ausgedrückt, nach der Formel der sphärischen Trigonometrie

$$(4) \qquad \cos \psi = \sin \varphi_1 \sin \varphi + \cos \varphi_1 \cos \varphi \cos (\lambda_1 - \lambda).$$

Da diese Formel für die Rechnung nicht bequem ist, so führt man gewöhnlich einen Hilfswinkel ω ein, der durch die Formel

$$\cot \omega = \cot \varphi \cos (\lambda_1 - \lambda)$$

bestimmt ist. Man hat dann

$$(5) \qquad \cos \psi = \frac{\sin \varphi \cos (\varphi_1 - \omega)}{\sin \omega}.$$

Man hat z. B. für

Greenwich $\varphi = + 51^0\ 28'\ 38''$ und $\lambda = 0^0\ 0'\ 0''$
Washington $\varphi_1 = + 38^0\ 53'\ 39''$ „ $\lambda_1 = 77^0\ 3'\ 6''$;

also

$$\cot \omega = \cot 51^0\ 28'\ 38'' \cos 77^0\ 3'\ 6''.$$

Mit sechsstelligen Logarithmen erhält man

$$\begin{aligned} \lg \cot 51^0\ 28'\ 38'' &= 9.900960 \\ + \lg \cos 77^0\ \ 3'\ \ 6'' &= 9.350388 \\ \text{folglich } \lg \cot \omega &= 9.251348 \\ \omega &= 79^0\ 53'\ 9''. \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter

$$\cos \psi = \frac{\sin 51^0\ 28'\ 38'' \cos 40^0\ 59'}{\sin 79^0\ 53'\ 9''}.$$

$$\begin{aligned} \lg \sin 51^0\ 28'\ 38'' &= 9.893407 \\ + \lg \cos 40\ \ 59\ \ 30 &= 9.877835 \\ &\ 9.771242 \\ - \lg \sin 79\ \ 53\ \ 9 &= 9.993198 \\ \lg \cos \psi &= 9.778044 \\ \psi &= 53^0\ 8'\ 26''. \end{aligned}$$

Wenn man nun weiss, dass der Bogen eines grössten Kreises auf der Erde eine Länge von 15 geogr. Meilen besitzt, so folgt hieraus die kürzeste Entfernung von Greenwich bis Washington = 797,108 geogr. Meilen.

5. Zur Ermittelung der Grösse der Erdkugel, ihres Umfanges und Halbmessers, hat man am frühesten die sogenannten Meri-

dianmessungen benutzt. Auf einem Meridian werden zwei Punkte A und B angenommen und es wird nun gemessen

a. auf astronomischem Wege der Unterschied der geographischen Breite beider Orte, welcher die Länge des Meridianbogens AB in Gradmaass giebt, und

b. auf geodätischem Wege die Länge dieses Bogens in irgend einem Längenmaasse.

Ist ψ der Breitenunterschied und l die Länge des Bogens, so ist der Umfang der Erde

$$a = l \frac{360}{\psi}$$

und der Erdhalbmesser

$$r = \frac{a}{2\pi}.$$

Die erste Meridianmessung wurde ums Jahr 200 v. Chr. von dem Alexandrinischen Gelehrten Eratosthenes ausgeführt; Endpunkte des Bogens waren Alexandrien und Syena. In Syena sollte zur Zeit des Sommersolstitiums die Sonne Mittags im Zenith stehen, während sie der angestellten Messung zufolge in Alexandrien zu derselben Zeit noch um $7\frac{1}{5}$ Grad, oder um $\frac{1}{50}$ des Kreisumfanges vom Zenith entfernt war. Daher musste der Meridianbogen Alexandrien-Syena $\frac{1}{50}$ des Erdumfanges sein, und weil durch direkte Messung für die Länge dieses Bogens sich 5000 Stadien ergaben, so musste der Erdumfang 250000 Stadien sein.

Seitdem sind zahlreiche, mehr oder minder umfangreiche Meridianmessungen ausgeführt worden, deren Aufzählung an dieser Stelle unterbleiben muss. Die umfänglichste ist die in den Jahren 1818 bis 1853 ausgeführte Russisch-skandinavische zwischen Fuglenaes 70° 40′ nördl. Br. am Nordkap bis Ismail an der Donau 45° 20′ Br.

6. Zu der Frage nach der Grösse der Erde trat im letzten Viertel des siebzehnten Jahrhunderts ein neues Problem, die genauere Bestimmung der Gestalt der Erde. Huygens und Newton hatten aus theoretischen Gründen darzuthun versucht, dass die Erde nicht genau die Gestalt einer Kugel besitzen könne, sondern vielmehr ein abgeplattetes Rotationsellipsoid sein müsse, und die Pendelbeobachtungen, welche Richer im Jahre 1672 in Cayenne machte, schienen diese Ansicht zu bestärken. Die Bestätigung erfolgte durch die Ergebnisse der beiden französischen Meridianmessungen, von denen die eine 1735 — 1742 von Bouguer, Godin und Lacondamine in Peru, die andere von Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier und dem Schweden Celsius 1736 in Lappland ausgeführt wurde. Es ergab sich, dass der Meridiangrad in der Nähe des Aequators merklich kleiner sei, als am Pole, wie es sein muss, wenn unsere Erde wirklich ein abgeplattetes Rotationsellipsoid ist.

Ein abgeplattetes Rotationsellipsoid wird nämlich beschrieben von einer Ellipse, welche sich um ihre kleine oder Neben-Achse dreht. Die Endpunkte der Nebenachse sind die Pole, die succes-

siven Lagen der rotirenden Ellipse bilden die Meridiane der Fläche. Diese Meridiane sind also ähnliche und gleiche Ellipsen, welche die Nebenachse gemein haben. Jeder Punkt P beschreibt bei der Umdrehung einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Fusspunkt der Senkrechten ist, die man von P aus auf die Drehungsachse fällen kann. Alle diese Kreise sind Parallelkreise der Fläche. Der grösste unter ihnen ist der Aequator; er hat als Halbmesser die grosse Halbachse der rotirenden Ellipse. Unter geographischer Breite eines Punktes P versteht man den Winkel, welchen die Normale der Fläche in P mit der Aequatorebene einschliesst. Diese Flächennormale stimmt aber überein mit der Normalen der Meridian-Ellipse für den Punkt P und die Breite ist daher der früher in §. 4 mit φ bezeichnete Winkel.

Der Halbmesser r_1 eines Parallelkreises von der Breite φ ist unser früheres x, also

$$r_1 = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Der Krümmungshalbmesser für den Punkt P (geograph. Breite $= \varphi$) des Meridianes ist

$$\varrho = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}^3};$$

derselbe wächst, wie man sieht, vom Aequator nach dem Pole hin stetig.

Da, wie die Erfahrung zeigt, die Grösse ε nur sehr klein ist, so weicht die Meridianellipse nicht beträchtlich vom Kreise ab. Handelt es sich nun um die Berechnung der Länge eines Meridianbogens von relativ nicht zu grosser Ausdehnung. so darf man denselben mit sehr grosser Annäherung als einen Kreisbogen betrachten, dessen Halbmesser der Krümmungshalbmesser für den Mittelwerth der Breite von Anfangs- und Endpunkt ist. Da aber ein Kreisbogen von 1^0 auf einem Kreise mit dem Halbmesser 1 den Werth

$$\mu = \frac{2\pi}{360} = 0{,}0174533$$

besitzt, so ist die Länge l eines Meridian-Grades mit der mittlern Breite φ durch die Formel gegeben

$$l = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)\,\mu}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}^3}$$

und diese Grösse wird mit wachsenden Werthen von φ immer grösser.

Hat man nun für zwei verschiedene Breiten die Länge des Meridiangrades gemessen, so lässt sich daraus sowohl ε als a berechnen.

Hat man nämlich für die Breite φ_1 den Werth für einen Bogengrad

$$l_1 = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)\,\mu}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1}^3},$$

so erhält man aus den beiden letzten Gleichungen

$$\left(\frac{l_1}{l}\right)^3 = \frac{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi_1},$$

woraus weiter folgt

$$\varepsilon^2 = \frac{1 - \left(\frac{l_1}{l}\right)^3}{\sin^2\varphi - \left(\frac{l_1}{l}\right)^3 \sin^2\varphi_1}.$$

Statt der Excentricität giebt man aber in der Regel die Abplattung α an, d. h. den Unterschied zwischen dem Polarhalbmesser $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ und dem Aequatorialhalbmesser a, dividirt durch den letzteren, d. i.

$$\alpha = \frac{a - b}{a} = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Bessel hat auf Grund zehn verschiedener Gradmessungen im Jahre 1841 folgende Werthe für die Dimensionen der Erde veröffentlicht:

Aequatorial-Halbmesser a = 3272077,14 Toisen
= 6377397,16 Meter,
Polarhalbmesser . . b = 3261139,33 Toisen
= 6356078,97 Meter,
Abplattung . . . . $\alpha = \frac{1}{299,1528}$.

Die Länge des Erdquadranten, d. h. des Meridianbogens vom Aequator bis zum Pole, ist 5131179,81 Toisen, die mittlere Länge eines Meridiangrades 57013,109 Toisen und die Länge eines Aequatorgrades 57108,52 Toisen, daher die Länge einer geograph. Meile, von der man 15 auf den Aequatorgrad rechnet = 3807,23 Toisen oder 7420,38 Meter. Die Länge des Meters ist 443,296 Pariser Linien oder 0,5130740 Toisen, der Erdquadrant hat daher eine Länge von 10000856 und der Erdumfang in Richtung des Meridians eine solche von 40003423 Metern. Es ist dies eine Folge der frühern nicht ganz genauen Berechnungsart, denn der gesetzlichen Bestimmung zufolge sollte das von der französischen Regierung eingeführte Meter der zehnmillionte Theil des Erdquadranten sein.

7. Die verschiedenen Gradmessungen führen indessen nicht alle auf denselben Werth für die Abplattung der Erde, und ebenso erhält man bei Anwendung verschiedener anderer Methoden andere, indessen nicht allzusehr abweichende Werthe. Diese Verschiedenheiten kommen zum Theil auf Rechnung der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, zum grossen Theil aber weisen sie auf merkliche Abweichungen der Erdoberfläche von der Form eines Rotationsellipsoides hin. Ausser den Meridianmessungen hat man noch Parallelkreismessungen vorgenommen, um die Form der Erde zu ermitteln; zu demselben Zwecke sind auch Pendelbeobachtungen in

den verschiedensten Gegenden der Erde angestellt worden und endlich hat Laplace aus der Mondbewegung den Werth $\frac{1}{306}$ für die Erdabplattung abgeleitet.

Die grössten Abweichungen zeigen die aus den Pendelbeobachtungen abgeleiteten Resultate, was wahrscheinlich von den durch die eigenthümliche Vertheilung der dichteren und weniger dichten Massen im Innern der Erde an einzelnen Orten bewirkten lokalen Aenderungen der Schwerkraft herrührt.

Im Ganzen aber gewinnt es den Anschein, als sei auch das Rotationsellipsoid nur eine angenäherte Form für die Erde und man kann sich die Aufgabe stellen, nach einem Gesetze für die Verschiedenheit der Meridiane zu suchen. Es waren ursprünglich theoretische Betrachtungen, welche zu der Ansicht führten, dass die Erde ein Rotationsellipsoid sein müsse. Man legte sich die Frage vor, welche Form wohl die Erde angenommen habe, wenn sie in einem früheren Stadium der Entwickelung einmal tropfbarflüssig gewesen sei und sich um ihre Achse gedreht habe. Unter der Voraussetzung der Homogeneität der Flüssigkeit zeigte man, dass die Form des abgeplatteten Rotationsellipsoides der Gleichgewichtsbedingung genüge, und daraus hat man lange irrthümlich den Schluss gezogen, dass diese Form nothwendig sei. Man war daher einigermaassen überrascht, als im Jahre 1834 der grosse Königsberger Analytiker C. G. J. Jacobi darauf aufmerksam machte, dass auch ein dreiachsiges Ellipsoid den Gleichgewichtsbedingungen genüge.

Später hat der russische General Theod. F. von Schubert aus acht grösseren Meridianmessungen, darunter auch die russisch-skandinavische, das Resultat abzuleiten versucht, dass die Erde in der That die Gestalt eines dreiachsigen Ellipsoides besitze. Der Aequator würde demnach kein Kreis, sondern eine Ellipse sein, und Schubert findet, dass deren

grosse Halbachse = 3272671,5 Toisen
und die kleine „ = 3272303,2 „

misst. Die Endpunkte der grossen Achse verlegt er nach 76° 24′ östl. und 103° 36′ westl. Länge von Greenwich, wogegen die Endpunkte der kleinen Achse in 166° 24′ östl. und 13° 36′ westl. Länge liegen. Die Meridiane sind sämmtlich Ellipsen, deren Haupt-Achsen Durchmesser der Aequatorial-Ellipse sind und welche die kleine Achse gemeinschaftlich haben. Für diese halbe Polar-Achse, welche die Rotations-Achse ist, findet Schubert 3261467,9 Toisen. Die Abplattung ist in den verschiedenen Meridian-Ellipsen verschieden, am grössten im Meridian der grossen Aequator-Achse, nämlich $\frac{1}{292,109}$, und am kleinsten im Meridian der kleinsten Aequator-Ellipse, $\frac{1}{302,004}$.

Schubert selbst hat freilich diese Bestimmungen als nur vorläufige hingestellt, die noch späterer Berichtigungen bedürfen. Auch schliesst er nicht die Möglichkeit aus, dass grössere lokale Un-

regelmässigkeiten vorhanden sind. Gerade zur genaueren Bestimmung der Form der Erde im mittlern Europa wurde die mitteleuropäische Gradmessung unternommen, die allmälig immer grössere Dimensionen angenommen hat.

Uebrigens ist die Schubert'sche Ansicht nur als ein Versuch, die verschiedenen Gradmessungen in bessere Uebereinstimmung zu bringen, zu betrachten, und es hat namentlich der russische Staatsrath O. von Struve dieselbe verworfen.

8. Im Folgenden werden wir die Erde in der Regel als kugelförmig betrachten, doch soll auch vielfach die ellipsoidische Form berücksichtigt werden. Wo dies geschieht, werden wir uns die Erde als ein abgeplattetes Rotations-Ellipsoid denken und in den Tabellen werden wir dann von den Bessel'schen Zahlen Gebrauch machen.

Unsere Aufgabe aber besteht in allen Fällen in der Abbildung des Liniennetzes der Meridiane und Parallelkreise.

Die auf den beigegebenen Tafeln verzeichneten Kartennetze sind konstruirt unter der Voraussetzung, dass die abzubildende Kugel einen Durchmesser $2a$ von 5 Centimeter, oder dass das abzubildende Rotationsellipsoid einen gleich langen Aequatorial-Durchmesser besitze.

II. Specielle Betrachtung der verschiedenen perspektivischen Abbildungen.

§. 8.

Die gnomonische Abbildung.

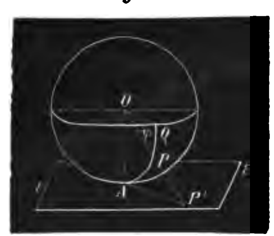
I. Allgemeines.

1. Unter gnomonischer Abbildung oder Centralprojektion versteht man diejenige perspektivische Abbildung, bei welcher das Auge im Mittelpunkte der abzubildenden Kugelfläche angenommen wird.

Die Bildebene wollen wir als Tangentialebene an die Kugel annehmen. Da parallele Schnitte eines Kegels immer ähnliche Figuren sind, so wird durch paralleles Verschieben der Bildebene Nichts geändert als der Maassstab der Abbildung.

2. Verbindet man alle Punkte eines grössten Kugelkreises mit dem Mittelpunkte, so fallen die Verbindungslinien alle in eine Ebene und da der Durchschnitt der letzteren mit einer Ebene immer eine gerade Linie ist, so ist die gnomonische Abbildung eines grössten Kugelkreises eine gerade Linie. Mit anderen Worten: Die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten der Erdoberfläche stellt sich auf der Karte als gerade Linie dar, Darin liegt eben der Hauptvorzug dieser Darstellungsart.

Fig. 27.



3. Ist O der Kugelmittelpunkt, A der Berührungspunkt der Bildebene und der Kugel und Q ein Punkt des grössten Kreises, welcher von A um 90^0 absteht, dessen Ebene also der Bildebene parallel geht, so ist OQ parallel zur Bildebene und der Durchschnittspunkt Q' von OQ mit der Bildebene fällt daher in unendliche Ferne. Man kann also die Punkte dieses Kreises nicht mehr auf der Bildebene darstellen und muss sich sonach bei der Darstellung auf einer einzelnen Karte auf einen kleineren Theil der Erd- oder Himmelsfläche beschränken, als die Halbkugel.

4. Die Bildebene kann drei wesentlich verschiedene Lagen besitzen.

a. Sie kann die Erdkugel in einem Pole berühren, in welchem Falle man die gnomonische Abbildung als Polarprojektion bezeichnet.

b, Die Bildebene kann auch den Aequator in einem Punkte A berühren und ist in diesem Falle parallel demjenigen Meridiane, dessen Länge, von A aus gezählt, 90^0 beträgt. Die Abbildung wird dann Meridianprojektion genannt.

c. Die Bildebene berührt die Erde in irgend einem andern Punkte, sie fällt also zusammen mit der Horizontalebene dieses Punktes. Man nennt die Abbildung dann allgemein Horizontal-Projektion.

Dieselbe Unterscheidung lässt sich begreiflicherweise auch bei anderen Darstellungsarten machen.

II. Gnomonische Polarprojektion.

5. Ist in Fig. 27 A der Pol, ε die Bildebene, P ein beliebiger Punkt, φ dessen Breite und λ seine Länge, P' die Projektion von P, so ist

$$AP' = r' = a \cot \varphi, \tag{1}$$

wenn a den Halbmesser der Kugel bedeutet, und diese Länge AP' oder r' ist die Projektion des Meridianbogens AP. Da der Winkel XAP' zwischen der Projektion AX des ersten Meridianes und derjenigen des durch P gehenden nichts weiter ist als die Länge λ, und da der Ausdruck für r' von λ nicht abhängt, also für alle Werthe von λ konstant bleibt, so lange die Breite φ sich nicht ändert, so hat man folgende zwei Sätze:

Bei der gnomonischen Polarprojektion werden die Meridiane durch gerade Linien dargestellt, welche vom Centrum A der Karte, der Abbildung des Poles, ausgehen und deren Winkel den Längenunterschieden der Meridiane gleich sind,

und die Parallelkreise stellen sich in Form koncentrischer Kreise um A dar, deren Halbmesser durch die Formel $a \cot \varphi$ ausgedrückt werden.

Die Werthe dieser Halbmesser kann man aus der folgenden kleinen Tabelle entnehmen.

φ	cot φ	φ	cot φ	φ	cot φ
0°	∞	35°	1,4281	65°	0,4663
5	11,4301	40	1,1918	70	0,3640
10	5,6713	45	1,0000	75	0,2679
15	3,7321	50	0,8391	80	0,1763
20	2,7475	55	0,7002	85	0,0875
25	2,1445	60	0,5774	90	0,0000
30	1,7321				

Statt dessen kann man die Halbmesser auch konstruiren.

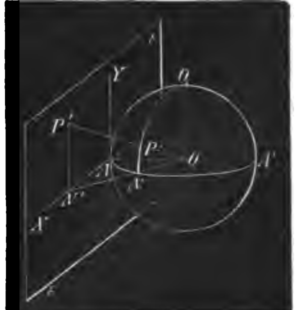
Sollen die Parallelkreise für die Breiten 80°, 70°, 60° etc. gefunden werden, so zeichne man sich um O als Mittelpunkt einen Viertelkreis und lege an den Endpunkt A desselben eine Tangente. Dann theile man den Viertelkreis in 9 gleiche Theile, die Theilpunkte bezeichne man von A aus mit 80, 70, 60 etc. und verbinde sie mit O; die Entfernungen der Punkte, welche durch diese Verbindungslinien auf der Tangente abgeschnitten werden, von A aus gerechnet, sind die Halbmesser.

Auf diese Weise ist auf **Taf. I** die **Fig. I** erhalten worden, welche uns die Umgebung des Poles A von 90° bis 30° geogr. Breite und auf eine Längenausdehnung von 180° zeigt.

III. Gnomonische Meridianprojektion.

6. In **Fig. 28** sei AA' der Aequator, Q der Pol, O der Mittelpunkt der Kugel, QA der mittelste (erste) Meridian, QN ein Meridian von der Länge $AON = \lambda$, P ein Punkt desselben von der Breite φ. Die Bildebene, welche die Kugel in A berührt, ist dann bestimmt durch die beiden auf einander senkrechten Tangenten der Kugel AX und AY, von denen die erstere in der Ebene des Aequators, die zweite in der Ebene des ersten Meridians liegt. Ist nun P' der Schnittpunkt von OP mit der Bildebene und zieht man $P'N'$ senkrecht auf AX. so liegt N' auf der Verlängerung von ON und für die Koordinaten des Punktes P', d. h. für die Linien $AN' = x$ und $N'P' = y$ hat man folgende Werthe

Fig. 28.



(2) $$x = OA \tan \lambda = a \tan \lambda,$$

(3) $$y = ON' \tan \varphi = a \sec \lambda \tan \varphi.$$

Hieraus ergeben sich folgende Regeln.

Der Aequator wird durch die gerade Linie AX dargestellt, der mittelste Meridian durch die darauf senkrechte gerade Linie AY und alle andern Meridiane durch Gerade, welche parallel zu OY laufen und deren Abstand von OY durch die Formel

$$x = a \tan \lambda \tag{4}$$

bestimmt ist, welche man einfach konstruiren kann.

Ein Parallelkreis wird durch eine Hyperbel dargestellt, deren reelle Achse in der Linie OY liegt und den Werth $2\,a \tan \varphi$ hat, während die imaginäre Achse in der OX liegt und den Werth $2a$ besitzt.

Aus den Formeln für x und y erhält man nämlich

$$\frac{y}{a \tan \varphi} = \sec \lambda \text{ und } \frac{x}{a} = \tan \lambda$$

und da

$$\sec^2\lambda - \tan^2\lambda = 1$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{y^2}{a^2 \tan^2\varphi} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{5}$$

die Gleichung der erwähnten Hyperbel.

Auf **Taf. I** stellt **Fig. II** diese Projektion dar. Die Theilungspunkte auf XX' und ebenso die auf YY' haben ganz dieselben Abstände unter einander, wie die Punkte auf der obersten Linie von **Fig. I.** Die Abbildungen der Meridiane sind durch die Punkte auf XX' völlig bestimmt. Was die hyperbelförmigen Abbildungen der Parallelkreise betrifft, so haben sie die gemeinsame Nebenachse $a = AB$ und ihre Hauptachsen sind die Entfernungen zwischen je zwei mit gleichen Nummern versehenen Punkten auf YY'. Um nun z. B. die Hyperbel zu konstruiren, welche durch die beiden Punkte 40 auf YY' geht, setzt man den Zirkel in dem Punkte B ein, öffnet ihn bis zu einem der Punkte 40 und trägt die erhaltene Strecke von A nach F und F_1 hin ab. F und F_1 sind dann die Brennpunkte und die Hyperbel kann nun nach Anleitung von §. 5, Nr. 5 konstruirt werden.

IV. Gnomonische Horizontalprojektion.

7. In **Fig. 29** sei O der Kugelmittelpunkt, BAQ der mittelste (erste) Meridian, A derjenige Punkt dieses Meridianes, in welchem die Bildebene die Kugel berührt, B der auf dem Aequator liegende Punkt dieses Meridianes und Q der Pol; ferner sei die Breite von A oder der Bogen $BA = \alpha$. Dann ist klar, dass der erste Meridian sich in Form der Geraden AX' projicirt, und zwar ist Q' die Projektion des Poles Q, wobei

$$AQ' = a \cot \alpha \tag{6}$$

ist, a als Kugelhalbmesser vorausgesetzt.

Der Punkt B des Aequators projicirt sich ebenfalls auf die Linie AX, nach B', und es ist

$$B'A = a \tan \alpha, \tag{7}$$

wobei nicht zu vergessen ist, dass immer B' und Q' auf entgegengesetzten Seiten von A liegen.

Die Projektionen der verschiedenen Aequatorpunkte fallen alle auf die Gerade $B'Y$, welche im Punkte B' senkrecht auf AX errichtet ist. Diese Linie $B'Y$ ist also die Projektion des Aequators.

8. Ein beliebiger Meridian QPC projicirt sich in Form einer Geraden $Q'C'$, wo Q' die Projektion des Poles Q, C' die des Aequatorpunktes C ist.

Zur Berechnung des Winkels Θ, den diese Gerade mit AX bildet, hat man die Gleichung

$$\tan \Theta = \frac{B'C'}{B'Q'}.$$

Nun ist aber $OB' = a \sec \alpha$, $B'C' = OB' \tan \lambda$, wenn λ die Länge des Meridianes QPC, vom Meridiane AQ ausgemessen, bedeutet; folglich

$$B'C' = a \sec \alpha \tan \lambda.$$

Ferner ist

$$B'Q' = B'A + AQ' = a \tan \alpha + a \cot \alpha = a \sec \alpha \operatorname{cosec} \alpha.$$

Mithin

$$\tan \Theta = \sin \alpha \tan \lambda. \tag{8}$$

Die Konstruktion der verschiedenen Meridiane ist auf **Taf. I** aus **Fig. III** näher zu erkennen.

Um O ist mit dem Halbmesser $OA = a$ ein Kreis beschrieben, der den ersten Meridian darstellt; derselbe ist vom Punkte B aus, der einen Aequatorpunkt vorstellt, von 10 zu 10 Grad eingetheilt, so dass dem Punkte A eine Breite von $\alpha = 50^0$ zukommt. In A ist eine Tangente AX an den Kreis gelegt und auf diese sind die Punkte B und Q (der Pol) in B' und Q' projicirt; in B' ist $B'Y$ senkrecht auf AX errichtet.

Ferner ist um Q' mit dem Halbmesser $Q'B'$ ein Kreisbogen geschlagen und bis zum Schnittpunkte S mit der Verlängerung von QO fortgesetzt und alsdann ST senkrecht auf AX gezogen worden. Da $\angle SQ'T = \angle BOA = \alpha$ ist, so ist

$$ST = Q'B' \sin \alpha.$$

Auf der Verlängerung von XB' ist dann U so bestimmt worden, dass

$$B'U = ST = Q'B' \sin \alpha$$

ist; um U hat man einen durch B' gehenden Kreis gelegt und denselben von 10 zu 10 Grad eingetheilt. Die einzelnen Theilpunkte sind mit U verbunden und die Verbindungslinien bis zum Schnittpunkte mit der Verlängerung von YB' fortgesetzt worden. Die so erhaltenen Punkte werden dann auf die andere Seite von $B'Y$ übertragen (wenn man die rechte Hälfte der Karte zeichnen will) und mit Q' verbunden.

Ist z. B. $\lambda = PUB'$, so ist

$$B'P = B'P_1 = B'U \tan \lambda = Q'B' \sin \alpha \tan \lambda.$$

Andererntheils ist aber auch

$$B'P_1 = Q'B' \tan B'Q'P_1,$$

mithin

$$\tan B'Q'P_1 = \sin \alpha \tan \lambda,$$

und wenn man Gleichung (8) berücksichtigt, so erkennt man, dass $B'Q'P_1 = \Theta$ ist.

9. Ist P in **Fig. 29** ein Punkt auf dem Meridiane CQ, dessen Breite φ und dessen Länge λ beträgt, P' seine Projektion, so handelt es sich für uns jetzt um die Ermittelung der rechtwinkligen Koordinaten

$$AM = x \text{ und } MP' = y$$

dieses Punktes. Ist zunächst G der Mittelpunkt des durch P gehenden Parallelkreises, so ist

$$GP = a \cos \varphi, \quad OG = a \sin \varphi,$$

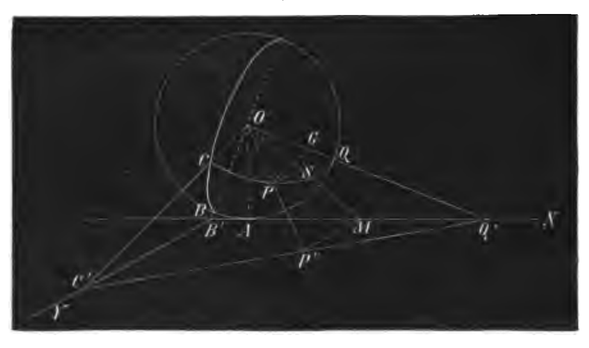
und wenn PS die Senkrechte ist, welche man von P aus auf die Ebene des ersten Meridianes fällen kann, so ist weiter

$$GS = GP \cos \lambda = a \cos \varphi \cos \lambda.$$

Da nun S auf der Verbindungslinie OM liegt, so hat man

$$\tan MOQ' = \frac{GS}{OG} = \cot \varphi \cos \lambda.$$

Fig. 29.



Weiter ist dann

$$\tan AOM = \tan (90^0 - \alpha - MOQ') = \cot (\alpha + MOQ)$$
$$= \frac{1 - \tan \alpha \tan MOQ}{\tan \alpha + \tan MOQ} = \frac{1 - \tan \alpha \cot \varphi \cos \lambda}{\tan \alpha + \cot \varphi \cos \lambda},$$

das ist

$$\tan AOM = \frac{\cos \alpha \sin \varphi - \sin \alpha \cos \varphi \cos \lambda}{\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi \cos \lambda},$$

und da $x = AM = a \tan AOM$, so hat man

$$(9) \qquad x = a \frac{\cos \alpha \sin \varphi - \sin \alpha \cos \varphi \cos \lambda}{\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi \cos \lambda}.$$

Zur Berechnung von $y = MP'$ dient die Formel

$$y = (AQ' - x) \tan \Theta,$$

aus welcher man nach Einsetzung der betreffenden Werthe und einigen einfachen Reduktionen erhält

$$(10) \qquad y = \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{\sin \alpha \sin \varphi + \cos \alpha \cos \varphi \cos \lambda}.$$

10. Eliminirt man aus den beiden Gleichungen für x und y die Länge λ, etwa indem man aus der ersten den Werth von $\cos \lambda$ ausrechnet und denselben in die zweite einsetzt, nachdem man dieselbe quadrirt und $1 - \cos^2\lambda$ an die Stelle von $\sin^2\lambda$ gesetzt hat, so ergiebt sich die Gleichung

$$(11) \qquad y^2 \sin^2\varphi + x^2 (\sin^2\varphi - \cos^2\alpha) - 2ax \sin \alpha \cos \alpha + a^2 (\sin^2\varphi - \sin^2\alpha) = 0,$$

welche die Abbildung des Parallelkreises von der Breite φ ausdrückt. Diese Abbildung ist im Allgemeinen ein Kegelschnitt, dessen eine Achse in die Linie OX, die Abbildung des ersten Meridianes fällt, wie sich daraus ergiebt, dass die Gleichung im Bezug auf y rein quadratisch ist. Es erübrigt nur noch, näher anzugeben, in welchen Fällen diese Linie eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

a. Wenn $\varphi = 90^0 - \alpha$ ist, so ist die Abbildung des Parallelkreises eine Parabel, denn es kommt dann das mit x^2 behaftete Glied der Gleichung (11) in Wegfall und man kann diese Gleichung in der Form schreiben

$$(12) \qquad y^2 = 2a \tan \alpha \, (x - a \cot 2\alpha).$$

Setzt man in derselben x_1 an die Stelle von $x - a \cot 2\alpha$, so ergiebt sich

$$y^2 = 2a \tan \alpha \cdot x_1.$$

Eine Vergleichung mit der Gleichung (1) des §. 6,

$$y^2 = px$$

zeigt sofort, dass diese Gleichung eine Parabel darstellt, und zwar ist der Anfangspunkt der Koordinaten der Scheitel der Parabel, welcher um $a \cot 2\alpha$ von A entfernt liegt, und die Brennweite ist

$$(13) \qquad \frac{p}{4} = \frac{a}{2} \tan \alpha.$$

Scheitel und Brennpunkt lassen sich leicht konstruiren.

Wenn O, Q, Q', A, B und B', auf **Taf. I** in **Fig. IIIa** dieselbe Bedeutung haben, wie in **Fig. III** und man zieht OC parallel mit AX, so ist $\angle QOC = \angle BOA = \alpha$; macht man dann $\angle DOQ$ ebenfalls $= \alpha$, so sind C und D die beiden im ersten Meridiane liegenden Punkte des Parallelkreises von der geographischen Breite α und der Schnittpunkt der Geraden CD und OQ ist der Mittelpunkt dieses Parallelkreises. Ferner ist der Schnittpunkt D' der Verlängerung von OD und der Achse AX der Scheitel der Parabel, und wenn man von D' aus auf OQ die Senkrechte $D'E$ und von E auf AX die Senkrechte EL fällt, so ist L der Brennpunkt derselben. Es ist nämlich $\angle EOD' = \alpha$, also $\angle OD'E = \angle ED'L = 90^0 - \alpha$ und sonach $D'E = OD' \sin \alpha$ und $D'L = D'E \sin \alpha$

$= OD' \sin^2\alpha$. Da aber $\angle AOD' = 90^0 - 2\alpha$ ist, so ist $OD' = a \operatorname{cosec} 2\alpha$, mithin

$$D'L = a \operatorname{cosec} 2\alpha \sin^2\alpha = \frac{a}{2} \tan \alpha,$$

entsprechend Gleichung (13).

Die Konstruktion der Parabel kann nun nach Anleitung des §. 6, Nr. 5 leicht erfolgen.

b. Wenn $\varphi + \alpha > 90^0$ ist, so ist die Abbildung des Parallelkreises eine Ellipse. Die Gleichung lässt sich dann auf die Form bringen.

$$(14) \quad y^2 \sin^2\varphi + \left(x - \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2\varphi - \cos^2\alpha}\right)^2 (\sin^2\varphi - \cos^2\alpha) = \frac{a^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{\sin^2\varphi - \cos^2\alpha}.$$

Diese Gleichung wird rein quadratisch auch im Bezug auf x, wenn man den Anfangspunkt um das Stück

$$x_0 = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2\varphi - \cos^2\alpha}$$

in der Richtung der positiven x verlegt. Der Punkt der x-Achse, dessen Abscisse x_0 ist, ist also der Mittelpunkt der Kurve. Setzt man $x - x_0 = x_1$, und ferner

$$b_1 = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi - \cos^2\alpha}} \text{ und } a_1 = \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2\varphi - \cos^2\alpha},$$

so geht die Gleichung über in

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse mit der grossen Halbachse a_1 und der kleinen b_1. Für die lineare Excentricität e erhält man

$$(15) \qquad e = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \frac{a \cos \varphi \cos \alpha}{\sin^2\varphi - \cos^2\alpha},$$

und die Entfernung eines Brennpunktes vom Endpunkte der Hauptachse ist daher

$$(16) \qquad a_1 - e = \frac{a \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \alpha}.$$

Die Endpunkte der Hauptachse und die Brennpunkte lassen sich leicht durch Konstruktion finden.

Sind H und I, auf **Taf. I** in **Fig. IIIa** die beiden im ersten Meridian liegenden Punkte des Parallelkreises von der Breite $BH = \varphi$, so sind die Projektionen H' und I' dieser Punkte die Endpunkte der grossen Achse und der Halbirungspunkt von $H'I'$ ist der Mittelpunkt der Ellipse.

Halbirt man ferner den Winkel $OH'X$ durch die Linie HK, welche den nach dem Pole Q gehenden Durchmesser in K schneidet, und fällt man dann von K auf AX die Senkrechte KF, so

ist F der eine Brennpunkt und der andere F_1 wird erhalten, wenn man $F_1 I' = H'F$ macht.

Es ist nämlich

$$H'F = H'K \cos KH'F, \; H'K = OH' \frac{\sin H'OQ'}{\sin OKH'} \text{ und}$$

$$OH' = \frac{OA}{\cos AOH'},$$

und durch Multiplikation dieser Gleichungen ergiebt sich

$$H'F = OA \frac{\cos KH'F \sin H'OQ'}{\sin OKH' \cos AOH'}.$$

Da aber $OA = a$, $\angle AOH' = \varphi - \alpha$, $\angle H'OQ' = 90^0 - \varphi$, $\angle KH'F = \frac{1}{2}(90^0 + \varphi - \alpha)$ und $\angle OKH' = \frac{1}{2}(90^0 + \varphi + \alpha)$ ist, so geht vorstehende Gleichung über in

$$H'F = \frac{a \cos \frac{1}{2}(90^0 + \varphi - \alpha) \cos \varphi}{\sin \frac{1}{2}(90^0 + \varphi + \alpha) \cos(\varphi - \alpha)};$$

setzt man hier im Nenner

$$\cos(\varphi - \alpha) = \sin(90^0 + \varphi - \alpha)$$
$$= 2 \sin \frac{1}{2}(90^0 + \varphi - \alpha) \cos \frac{1}{2}(90^0 + \varphi - \alpha),$$

so hebt sich $\cos \frac{1}{2}(90^0 + \varphi - \alpha)$ im Zähler und Nenner auf und es ist im Nenner

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(90^0 + \varphi + \alpha) \sin \tfrac{1}{2}(90^0 + \varphi - \alpha) = \sin \varphi + \cos \alpha,$$

weshalb man in Uebereinstimmung mit Gleichung (16) erhält

$$H'F = \frac{a \cos \varphi}{\cos \alpha + \cos \varphi}.$$

Hiernach lässt sich die Ellipse leicht konstruiren.

c. Wenn $\varphi + \alpha < 90^0$ ist, so wird die Kurve eine Hyperbel, deren reelle Achse in die AX fällt.

Die Gleichung nimmt dann, weil $\cos \alpha > \sin \varphi$ ist, die Form an

$$(17) \quad \left(x + \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi}\right)^2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi) - y^2 \sin^2 \varphi = \frac{a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi}.$$

Verlegt man den Anfangspunkt um das Stück

$$x_0 = \frac{a \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi}$$

von A aus in der Richtung nach B' und setzt $x + x_0 = x_1$, ferner

$$a_1 = \frac{a \sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi}, \; b_1 = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi}},$$

so kann man die Gleichung auch in der Form schreiben

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

welche die Mittelpunktsgleichung einer Hyperbel mit der reellen

Achse a_1 und der imaginären b_1 ist. Für die Excentricität e hat man die Gleichung

$$(18) \qquad e = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \frac{a \cos \alpha \cos \varphi}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi}$$

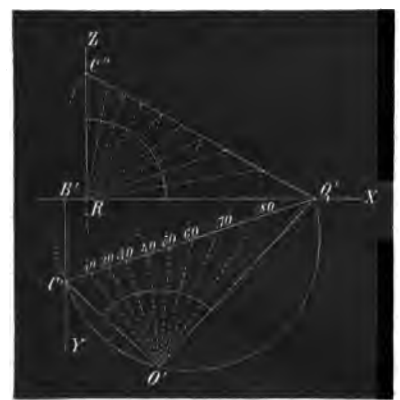
und die Entfernung eines Brennpunktes vom Scheitel ist

$$(19) \qquad e - a_1 = \frac{a \cos \varphi}{\cos \alpha + \sin \varphi}.$$

Die Konstruktion der Endpunkte der Hauptachse und der Brennpunkte ist genau so, wie bei der Ellipse. Auf **Taf. I** in **Fig. IIIa**, sind für die Hyperbel von 10° die beiden Brennpunkte G und G_1 konstruirt und in **Fig. III** auf derselben Tafel sind Abbildungen der verschiedenen Parallelkreise von 10° zu 10° auf der einen Seite des ersten Meridianes auf die vorstehend beschriebene Weise gezeichnet worden.

11. Statt der Reihe nach Punkte zu bestimmen, die auf der Abbildung eines Parallelkreises liegen, kann man auch zunächst die Punkte auf der Abbildung eines Meridianes bestimmen, welche den verschiedenen Breiten entsprechen. Verbindet man dann die Punkte gleicher Breite auf verschiedenen Meridianen, so erhält man die Abbildung des betreffenden Parallelkreises.

Fig. 30.



Ist Q' die Projektion des Poles Q, $B'Y$ die des Aequators und $Q'C'$ diejenige eines Meridianes von der Länge λ, entsprechend der **Fig. 29**, so konstruire man über $Q'C'$ als Durchmesser einen Halbkreis, schlage von Q' aus mit dem Halbmesser

$$OQ' = \frac{a}{\sin \alpha}$$

(vergl. **Fig. 30**) einen Bogen, der den Halbkreis im Punkte O' schneidet, worauf man O' mit Q' und C' verbindet. Alsdann beschreibt man um O' einen Viertelkreis, den man von $O'C'$ nach $O'Q'$ hin in gleiche Theile theilt, etwa in 9, wenn man die verschiedenen Breiten von 10° zu 10° in Betracht zu ziehen wünscht. Zieht man dann von O' aus nach allen Theilungspunkten Gerade und verlängert dieselben gehörig weit, so schneiden dieselben die Linie $Q'C'$ in den gesuchten Punkten, welche 10°, 20° . . . Breite haben. Wie man nämlich leicht erkennt, ist das Dreieck $Q'O'C'$ nichts weiter als das rechtwinklige Dreieck $Q'OC'$, niedergeklappt in die Zeichenebene.

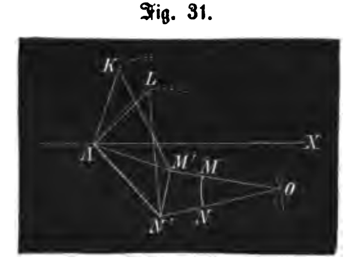
Statt der vorstehenden Konstruktion kann man sich auch der folgenden bedienen, welche sich durch bequemeres Arrangement auszeichnet:

Man macht in Fig. 30 auf $B'X$ die Strecke $Q'R = Q'O$, errichtet in R auf $Q'R$ die Senkrechte RZ, schlägt dann um Q' mit der Oeffnung $Q'C'$ einen Bogen, welcher RZ in C'' schneidet, zieht hierauf die Gerade $Q'C''$ und schlägt um R mit beliebiger Oeffnung einen Viertelkreis, den man eintheilt, etwa von 10° zu 10°. Verlängert man dann die nach den Theilungspunkten gerichteten Halbmesser bis zu ihren Schnittpunkten mit $Q'C''$ und schlägt durch die so erhaltenen Punkte Kreisbogen um Q', so schneiden letztere die $Q'C'$ in den gesuchten Punkten.

V. Konstruktion der Entfernung zweier Punkte.

12. Wenn auf der Karte zwei Punkte M' und N' gegeben sind, und wenn man ausserdem auch den Punkt A, in welchem die Bildebene die Kugel berührt, oder den Mittelpunkt der Karte, sowie den Kugelhalbmesser kennt, welcher der Kartenzeichnung zu Grunde liegt, so kann man leicht den Bogen eines grössten Kugelkreises konstruiren, welcher durch die Punkte M und N geht, deren Abbildungen M' und N' sind. Man hat nämlich nur nöthig, das Dreieck $OM'N'$ zu zeichnen, wo O den Kugelmittelpunkt bedeutet, und dann um O mit dem Kugelhalbmesser einen Kreisbogen zu beschreiben, welcher die Punkte M und N auf OM' und ON' angiebt. Die Seiten OM' und ON' sind aber die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke OAM' und OAN'. Daher folgende Konstruktion.

Fig. 31.



Man verbinde M' und N' mit A, errichte in A auf AM' und AN' die Senkrechten AK und AL, beide von der Länge a des Kugelhalbmessers, konstruire dann über $M'N'$ mit den Seiten AK und AL das Dreieck $OM'N'$ und schlage um O mit dem Halbmesser a der Kugel den Bogen MN, welcher, nach Gradmaass oder auch mit dem Längenmaassstabe gemessen, die Grösse des gesuchten Bogens auf der Erdkugel angiebt.

13. Da es oft vorkommt, dass die Länge eines Kreisbogens als gerade Linie dargestellt und mit einem Längenmaassstabe gemessen werden soll, so mag das Verfahren hier kurz angegeben werden.

Bedeutet in der Fig. 32 AB den betreffenden Bogen, so ziehe man den Durchmesser AC und verlängere ihn bis D, so dass $AD = \frac{3}{2} AC$ ist; errichte ferner in A eine Senkrechte AK und ziehe die Verbindungslinie DB, welche AK in E schneidet. Dann ist AE annäherungsweise gleich der Länge des Bogens.


Fig. 32.



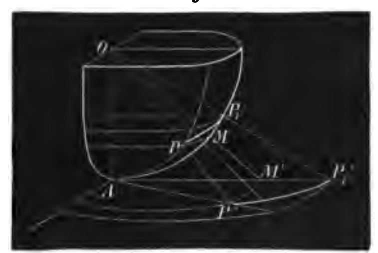
Diese Konstruktion giebt recht befriedigende Resultate, wenn der Bogen kleiner ist als 45°. Bei grösseren Bögen

ist es am einfachsten, sie in 2, oder 4, oder 8 gleiche Theile zu theilen, einen Theil zu rektificiren und die erhaltene Länge dann zu vervielfachen.

VI. Aenderungen der Winkel und Längen.

14. In **Fig. 33** sei P ein Punkt der Kugel, dessen Entfernung vom Berührungspunkte A, ausgedrückt in Bogenmaass, μ sein mag; PP_1 sei die Richtung nach einem benachbarten Punkte, ψ der Winkel, den diese Richtung mit dem Bogen AP einschliesst. Dann ist unsere Aufgabe die, den Winkel ψ' zu finden, den die Projektion $P'P'_1$ von PP_1 mit der Geraden AP', der Projektion von AP, einschliesst.

Fig. 33.



Legt man nun durch P und P_1 ein Paar zur Bildebene parallele Kugelkreise, so sind deren Projektionen ein Paar durch P' und P'_1 gehende Kreise mit dem Mittelpunkte A, und wenn M der Schnittpunkt von AP_1 mit dem durch P gehenden Parallelkreise, M' die Projektion von M ist, so gelten die Gleichungen

$$\tan \psi = \frac{MP}{P_1 M} \text{ und } \tan \psi' = \frac{M'P'}{P'_1 M'}$$

mit um so grösserer Genauigkeit, je kleiner die Strecke PP_1 ist.

Nun ist $AP = AM = a\mu$ und der kleine Bogen $MP_1 = a d\mu$, wenn wir, ähnlich wie früher, mit $d\mu$ eine verschwindend kleine Zunahme von μ bezeichnen. Ferner ist der Halbmesser des Parallelkreises durch $P = a \sin \mu$, und wenn wir den verschwindend kleinen Bogen MP, gemessen in Bogenmaass $= d\lambda$ setzen, so haben wir für die Länge MP die Formel $a \sin \mu \, d\lambda$, so dass sich die Formel ergiebt

$$\tan \psi = \frac{a \sin \mu \, d\lambda}{a \, d\mu} = \sin \mu \, \frac{d\lambda}{d\mu}.$$

Anderntheils ist, wenn man $\mu + d\mu = \mu'$ setzt,

$$AM' = a \tan \mu, \quad AP'_1 = a \tan \mu',$$

folglich

$$P'_1 M' = a (\tan \mu' - \tan \mu) = a \, \frac{\sin (\mu' - \mu)}{\cos \mu \cos \mu'}.$$

Da aber die Gleichung

$$\frac{\sin (\mu' - \mu)}{\mu' - \mu} = 1$$

um so genauer gilt, je näher $\mu' = \mu$ ist, so kann man $\sin (\mu' - \mu) = \mu' - \mu = d\mu$ setzen, so dass man, für $\mu = \mu_1$ hat

$$P'_1 M' = \frac{a \, d\mu}{\cos^2 \mu}.$$

Ferner ist $M'P'$ ein Stück Kreisbogen, und zwar ist $\angle P'AM' = d\lambda$. Folglich ist

$$M'P' = a \tan \mu \, d\lambda,$$

und also

$$\tan \psi' = \frac{M'P'}{P'_1 M'} = \sin \mu \cos \mu \frac{d\lambda}{d\mu},$$

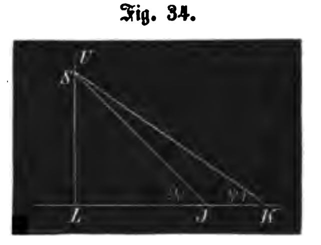
das ist

$$(20) \qquad \tan \psi' = \cos \mu \tan \varphi.$$

Man sieht hieraus, dass für $\mu = 0$, d. h. für den Punkt A, $\psi' = \psi$ ist, die Winkel nicht geändert werden, wogegen mit wachsender Entfernung von A $\tan \psi'$ im Vergleich zu $\tan \psi$ immer mehr abnimmt. Mit anderen Worten: die Winkel werden am wenigsten im Mittelpunkte der Karte, am meisten an den Rändern verändert, und zwar ist diese Aenderung nur von der Entfernung vom Mittelpunkte, nicht von der Richtung, nach welcher hin der betreffende Punkt liegt, abhängig.

15. Wenn der Winkel ψ' auf der Karte gegeben ist, so kann man daraus leicht ψ finden. Zu dem Zwecke zeichnet man sich als Hilfsfigur (s. **Fig. 34**) einen Kreis mit beliebigem Halbmesser KL und errichtet auf KL in L die Senkrechte LX, trägt dann $LI = KL \cos \mu$ ab und schlägt um I mit LI einen Kreis. Trägt man nun $LKS = \psi'$ ab, so ist $LIS = \psi$.

Fig. 34.



Bestimmt man auf diese Weise den Winkel zwischen AP und einer beliebigen Richtung und ebenso den Winkel zwischen AP und dem Meridiane, welcher durch P geht und dessen Abbildung $Q'P'$ ist, so kann man daraus den Winkel zwischen jener Richtung und dem Meridiane durch einfache Addition oder Subtraktion finden. Es ist sonach möglich, auf ganz einfache Weise die wahren Werthe der Winkel zu finden, unter denen ein grösster Kreis die verschiedenen Meridiane schneidet.

16. In **Figur 33** hat man für das Längenelement PP_1 die Gleichung

$$PP_1 = MP_1 \sec \psi = a \, d\mu \sec \psi = a \, d\mu \sqrt{1 + \tan^2 \psi}.$$

und für seine Projektion gilt

$$P'P'_1 = M'_1 P'_1 \sec \psi' = a \, d\mu \sec^2 \mu \sec \psi'$$

oder

$$P'P'_1 = a \, d\mu \sec^2 \mu \sqrt{1 + \cos^2 \mu \tan^2 \psi}$$

Das Verhältniss zwischen dem Bogenelement auf der Kugel und seiner Abbildung wird hiernach

$$\varkappa = \frac{P'P'_1}{PP_1} = \sec^2 \mu \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \mu \tan^2 \psi}{1 + \tan^2 \psi}}.$$

Da cos μ für alle Werthe von μ, welche grösser als 0 sind, ein echter Bruch ist, so ist der Zähler der Wurzelgrösse im Allgemeinen kleiner als der Nenner. Wenn $\psi = 90^0$ ist, d. h., wenn das Bogenelement rechtwinklig gegen AP liegt, so wird, wenn Zähler und Nenner unter der Wurzelgrösse mit tan ψ dividirt und dann $\psi = 90^0$ gesetzt wird, die Wurzelgrösse gleich

$$\sqrt{\frac{\cot^2\psi + \cos^2\mu}{\cot^2\psi + 1}} = \cos\mu,$$

mithin

$$\varkappa = \sec\mu = \varkappa'$$

und dies ist der kleinste Werth von $\varkappa$; denn fügt man im Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{\cos^2\mu}{1},$$

der in diesem Falle unter dem Wurzelzeichen steht, die Grösse $\cot^2\psi$ hinzu, so wächst der Werth des Bruches.

Den grössten Werth von $\varkappa$, der $\varkappa_2$ heissen mag, erhält man, wenn $\psi = 0$ ist; dann ist nämlich die Wurzelgrösse $= 1$, also

$$\varkappa'' = \sec^2\mu.$$

17. Betrachtet man als Flächenelement auf der Kugel ein Rechteck mit den Seiten MP_1 und PM, so ist dessen Fläche

$$MP_1 \cdot PM = a^2 \sin\mu\, d\mu\, d\lambda;$$

die Abbildung desselben ist dagegen

$$M'P'_1 \cdot P'M' = a^2 \sin\mu \sec^3\mu\, d\mu\, d\lambda,$$

so dass das Verhältniss zwischen Original und Abbildung oder die Flächenvergrösserung durch

$$\sec^3\mu$$

ausgedrückt wird. Diese Vergleichung ist um so genauer, je kleiner die Diagonale PP_1 des Kugelrechteckes angenommen wird.

VII. Vorzüge und Mängel der gnomonischen Abbildung. Historisches.

18. Die wesentlichste Eigenthümlichkeit dieser Projektionsart ist die, dass ein grösster Kugelkreis sich als gerade Linie darstellt. Da auf der Kugel die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten durch den Bogen des grössten Kreises gemessen wird, der durch die beiden Punkte geht, so ist für den Seefahrer eine Projektionsart nicht unwichtig, welche diese kürzeste Entfernung in so einfacher Weise darstellt. Zudem kann man ja auch mit leichter Mühe die Winkel finden, unter denen die kürzeste Linie die einzelnen Meridiane schneidet. Die Erleichterung, welche dem eben Gesagten zufolge diese Darstellungsweise dem Segeln im grössten Kreise gewährt, ist auch Veranlassung geworden, dass neuerdings der Hydrograph Knorr in Washington seine Karte des Nordatlantischen Oceans zwischen 0^0 und 65^0 nördlicher Breite in dieser Projektionsart entworfen hat. Vergl. *E. R. Knorr, Gnomonic chart of the North Atlantic Ocean, showing the direct course*

(on the great circle) between any two points as also the prevailing winds at each season and the currents. Washington. Hydrogr. Office. 1869. Auch auf dem Programme des geographischen Kongresses in Antwerpen stand die Frage wegen Anwendung der gnomonischen Projektion zu Seekarten.

19. Ein grosser Uebelstand dieser Projektionsart ist das rasche Wachsthum der Abstände mit zunehmender Entfernung von der Mitte der Karte. Dieses Wachsthum wird am grössten bei einem Abstande von 90°, hier nämlich fällt die Projektion in unendliche Ferne und es ist daher nicht möglich die ganze Halbkugel auf einer Ebene darzustellen.

Soll die ganze Kugel dargestellt werden, so braucht man dazu wenigstens vier Projektionsebenen. Am einfachsten könnte man dazu die vier Ebenen eines regelmässigen, der Kugel umschriebenen Tetraëders benutzen. Die ganze Kugelfläche würde dann auf vier gleichseitigen Dreiecken dargestellt erscheinen.

Indessen hat diese Form der Darstellung manche Unbequemlichkeit, und es erscheint daher zweckmässiger, die ganze Erdoberfläche auf den sechs quadratischen Seitenflächen eines Würfels abzubilden, welcher um die Kugel gelegt ist. Auf diese Weise ist u. a. von dem verdienstvollen Kartographen Chr. G. Reichard eine Abbildung der ganzen Erde auf 6 Blättern hergestellt und im Jahre 1803 in Weimar veröffentlicht worden.

Man hat auch noch andere Vorschläge gemacht. So hat der französische Geolog Elie de Beaumont die zwölf regelmässig fünfseitigen Flächen eines der Kugel umschriebenen regulären Dodekaëders sehr zweckmässig als Bildebenen befunden, wenn es sich um Anfertigung von Karten handelt, welche physikalische oder geologische Verhältnisse darstellen sollen. Saint Loup will die Kugelfläche auf die Seitenflächen eines der Kugel eingeschriebenen Ikosaëders projiciren; der österreichische General Franz von Hauslab hat als Projektionsebenen die dreieckigen Seitenflächen eines unregelmässigen Polyeders von 48 Flächen vorgeschlagen.

Im Ganzen aber ist diese Projektion zur Herstellung von Landkarten wenig im Gebrauch; einestheils wegen der starken Vergrösserung der Abstände nach dem Rande der Karte hin, dann wegen der Unbequemlichkeit der Zeichnung der Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln, welche die Parallelkreise darstellen.

Dagegen hat man sie schon seit dem Alterthum vielfach benutzt zur Anfertigung von Sternkarten. Hierzu eignet sie sich ganz besonders deshalb recht gut, weil uns die Sterne am Himmel auf einer Kugelfläche erscheinen, in deren Mittelpunkte wir uns befinden. Auf den sechs Flächen eines Würfels hat den ganzen Himmel dargestellt der Jesuit Paradies in seiner im Jahre 1674 in Paris veröffentlichten *Globi coelestis in tabulas planas redacti descriptio, auct. R. P. Jgnatio Gastone Paradies S. J. mathematico.* Einzelne Theile des Himmels enthält in dieser Darstellungsform auch schon die *Perspectiva coelestis, sive tabulae peculiares ad asterismos in plano delineandos, auct. R. P. Christophoro Grienberger. S. J. 1662.*

20. Im Bezug auf die Lage des Würfels, dessen sechs Seitenflächen die Bildebenen bilden, sind sehr verschiedene Annahmen möglich. Man kann z. B. denselben so legen, dass zwei Flächen die Kugel in den beiden Polen berühren, während die vier übrigen Berührungspunkte auf dem Aequator liegen. Dann erhält man zwei kongruente Polarprojektionen und vier kongruente Meridianprojektionen. Oder man kann den Würfel so legen, dass die beiden Pole sich in zwei gegenüberliegende Würfelecken projiciren; in diesem Falle erhält man sechs kongruente Horizontalprojektionen für 45° Breite. Oder man kann die Projektion der Pole in die Halbirungspunkte zweier gegenüberliegenden Würfelkanten fallen lassen, was vier kongruente Horizontalprojektionen für 45° Breite und zwei kongruente Meridianprojektionen giebt. Die nähere Betrachtung dieser und ähnlicher verschiedener Fälle kann aber übergangen werden, da das früher Gesagte zur Lösung der hierbei sich darbietenden Fragen ausreichend sein dürfte.

§. 9.

Die stereographische Abbildung.

I. Allgemeines.

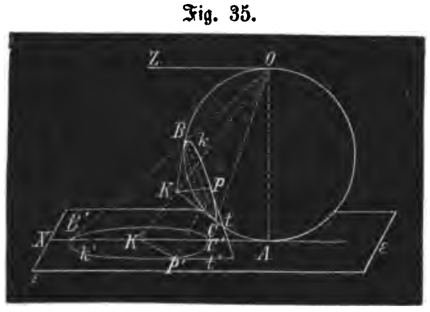
1. Bei dieser perspektivischen Abbildung denkt man sich das Auge O in einem Punkte der abzubildenden Kugelfläche; die Bildebene ε steht senkrecht auf dem durch O gehenden Durchmesser OA der Kugel, und zwar soll im Folgenden angenommen werden, dass sie die Kugel in dem Punkte A berührt, welcher dem Auge O diametral gegenüber liegt.

2. Die stereographische Projektion eines durch das Auge O gehenden Kugelkreises ist eine unbegrenzte Gerade.

Denn die Projektionsstrahlen fallen alle in eine Ebene, welche ε in einer Geraden schneidet; der unendlich entfernte Punkt der letzteren ist die Projektion von O.

3. Die stereographische Projektion k' eines nicht durch das Auge O gehenden Kugelkreises k ist wieder ein Kreis.

Fig. 35.



Zum Zwecke des Beweises legen wir durch OA (**Fig. 35**) eine zur Ebene des Kreises k senkrechte Ebene, welche die Kugel längs des Kreises $OBCA$, die Kreisebene längs des Durchmessers BC und die Bildebene ε längs der Geraden AX schneidet. Ziehen wir von O aus noch nach allen Punkten von k die Projektionsstrahlen, so fallen zwei davon, OB und OC in die erwähnte Hilfsebene und schneiden die AX in den Punkten B' und C'. Wenn man dann noch OZ parallel zu AX legt, so sind die Winkel $OB'C'$ und ZOB' als Wechselwinkel

gleich gross; der letztere aber ist gleich dem Winkel BCO, weil beide halb so gross sind als der Kreisbogen OB. Mithin ist $OB'C' = BCO$. Der Kreis k und seine in der Bildebene ε liegende Abbildung k' sind also Wechselschnitte des Kegels der Projektionsstrahlen. Folglich ist, der Behauptung entsprechend, k' ein Kreis.

4. Schneiden sich zwei Kugelkreise k und l in einem Punkte P und legt man dort an den ersten die Tangente t, an den letzteren die Tangente u, projicirt hierauf k, l, t und u in k', l', t' und u', so schneiden sich t' und u' unter demselben Winkel wie t und u.

Ist nämlich Q der Punkt der Bildebene, in welchem sich t und t' schneiden, R der Schnittpunkt von u und u' und P' die Projektion von P, so ist nach Nr. 5 des §. 2 $QP = QP'$, $RP = RP'$ und da die Dreiecke QPR und $QP'R$ die Seite QR noch gemein haben, so sind sie kongruent, mithin sind die Winkel QPR und $QP'R$ einander gleich.

5. Unter dem Winkel zweier sich schneidenden krummen Linien versteht man bekanntlich den Winkel, welchen ihre Tangenten im Schnittpunkte einschliessen. Man kann daher den in voriger Nummer bewiesenen Satz auch in den Worten ausdrücken:

> Die Projektionen k' und l' zweier Kugelkreise k und l schneiden sich unter demselben Winkel wie k und l selbst.

Man kann indessen eine noch allgemeinere Folgerung aus dem Satze der Nr. 4 ziehen.

Ein Bogenelement einer beliebigen Kurve lässt sich nämlich immer als ein verschwindend kleines Stück Kreisbogen ansehen. Denn nehmen wir drei in nicht zu grosser Entfernung liegende Punkte auf einer krummen Linie an, so können wir durch dieselben einen Kreis legen, welcher sich in der Nähe dieser Punkte um so inniger der Linie anschmiegen wird, je näher die Punkte aneinander liegen. Lässt man die letzteren mehr und mehr einander nahe rücken und endlich zusammenfallen, so erhält man schliesslich den Kreis, welchen wir schon früher als Krümmungskreis kennen gelernt haben. Schneiden sich also zwei beliebige auf der Kugel liegende Kurven in einem Punkte P, so können wir uns die dem Punkte P benachbarten Kurvenelemente durch ein Paar Kreisbogen-Elemente ersetzt denken, deren Tangenten mit denen der beiden Kurven zusammenfallen. Dann lässt sich der Beweis der Nr. 4 wiederholen und man sieht daraus

> dass überhaupt die stereographischen Projektionen zweier sphärischen Kurven sich unter demselben Winkel schneiden, wie diese Kurven, oder dass die Winkel in der Abbildung alle den Winkeln im Originale gleich sind.

Sonach ist die Abbildung in den kleinsten Theilen dem Originale ähnlich und die stereographische Abbildung gehört also zu den konformen oder orthomorphen Abbildungen, deren allgemeine Betrachtung erst dem fünften Kapitel zufällt.

6. Der Mittelpunkt K' der Projektion k' eines Kugelkreises k ist die Projektion des Scheitels K des Kegels, welcher die Kugel in dem Kreise k berührt.

Denn, ist P in Fig. 35 ein beliebiger Punkt auf k, so steht KP rechtwinklig auf der Tangente t, die man in P an k legen kann; folglich steht auch die Projektion $K'P'$ senkrecht auf der Tangente t', die man im Punkte P' an k' legen kann, und mithin fällt $P'K'$ in die Richtung des Halbmessers von k', der durch P' geht. Da alle Halbmesser von k' sich in K' schneiden, weil ja P ganz beliebig gewählt ist, so ist K' der Mittelpunkt von k'.

Wenn k ein grösster Kugelkreis ist, so geht der Berührungskegel in einen normalen Cylinder über. Der Mittelpunkt von k' wird dann erhalten, indem man von O aus eine Gerade zieht, die zu den Erzeugenden dieses Cylinders parallel läuft oder, was dasselbe ist, auf der Ebene von k senkrecht steht; der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Bildebene ε ist dann der gesuchte Mittelpunkt.

Die Sätze in Nr. 2 — 6 bilden die allgemeine Theorie der stereographischen Projektion. Wir wenden uns jetzt zu den besonderen Modifikationen, welche diese Abbildungsweise erfährt, je nachdem die Bildebene dem Aequator, einem Meridiane oder dem Horizonte eines beliebigen Punktes parallel ist. Wir werden sehen, wie man mittelst der obigen Sätze, ohne Zuhilfenahme neuer Untersuchungen, das Netz in allen Fällen konstruiren kann.

II. Stereographische Polar- oder Aequatorial-Projektion.

7. Bei dieser Darstellung befindet sich das Auge O in dem einen Pole der Kugel und die Bildebene ε berührt die letztere im entgegengesetzten Pole A. Man bildet diejenige Halbkugel ab, welche diesen Pol umgiebt; doch kann die Abbildung sich noch weiter, auf die andere Halbkugel ausdehnen, da nur die Projektion von O in unendliche Ferne fällt.

Die Meridiane werden dargestellt durch gerade Linien, welche sich im Punkte A unter denselben Winkeln schneiden, wie die Meridiane.

Die Parallelkreise erscheinen als koncentrische Kreise um A als Mittelpunkt, und zwar ist der Halbmesser der Abbildung des Parallelkreises von der Breite φ

$$r' = 2\,a \tan \tfrac{1}{2}\,(90^0 - \varphi),$$

wenn a den Halbmesser der Kugel bedeutet. Setzt man $2a = 1$, so hat man für r' die nachstehenden Werthe.

φ	r'	φ	r'
0°	1,0000	45°	0,4142
5	0,9163	50	0,3640
10	0,8391	55	0,3153
15	0,7673	60	0,2680
20	0,7002	65	0,2217
23° 27′ 30″	0,6562	66° 32′ 30″	0,2076
25°	0,6371	70°	0,1763
30	0,5774	75	0,1317
35	0,5206	80	0,0875
40	0,4663	85	0,0437

Will man die Halbmesser r' konstruiren, so kann man sich des folgenden, auf **Taf. I** in **Fig. IV** erläuterten Verfahrens bedienen.

Auf der Abbildung AX des Meridianes von 90° Länge errichte man senkrecht die Linie $AO = 2a$ und schlage darüber einen Halbkreis. Diesen theile man von A aus, etwa von 10 zu 10 oder von 5 zu 5 Grad ein. In der Figur sind die Theilpunkte von 10 zu 10 Grad angegeben und mit den zugehörigen Breitengraden, 80, 70, . . . bezeichnet worden. Verbindet man einen dieser Theilpunkte, z. B. D mit O und verlängert die Verbindungslinien bis zum Durchschnittspunkte D' mit AX, so ist AD' der gesuchte Radius r' für die dem Punkte D zukommende Breite.

Auf diese Weise ist in **Fig. IV** das Netz des vierten Theiles der Halbkugel entworfen worden. Die in Gestalt gerader Linien dargestellten Meridiane theilen die Abbildungen der Parallelkreise in Stücke von je 10 Grad.

III. Stereographische Meridian-Projektion.

8. Bei dieser Darstellung berührt die Bildebene den Aequator in einem Punkte A, das Auge befindet sich in dem diametral entgegengesetzten Punkte O des Aequators: die Abbildung hat es vorzugsweise mit der den Punkt A umgebenden Halbkugel zu thun, kann aber auch darüber hinaus gehen.

9. Der Aequator, sowie der erste, d. h. der durch A gehende Meridian erscheinen in der Abbildung als zwei auf einander senkrechte, im Punkte A sich schneidende gerade Linien.

Der erstere ist auf **Taf. I** in **Fig. V** durch $X'X$, der letztere durch $Q'_1 Q$ dargestellt. Dabei sind Q'_1 und Q' die Projektionen der beiden Pole Q_1 und Q der Kugel, und zwar ist $AQ' = Q'_1 A = 2a$ oder gleich dem doppelten Kugelhalbmesser.

Ein um A mit dem Halbmesser $AQ' = 2a$ geschlagener Kreis stellt den Meridian von der Länge $\lambda = 90°$ dar.

Die Richtigkeit der letzteren zwei Bemerkungen ergiebt sich daraus, dass die Ebene dieses Meridianes parallel zur Bildebene ε

ist und von O um den Halbmesser a absteht, während der Abstand $OA = 2a$ ist.

10. Die Abbildungen der übrigen Meridiane sind Kreise, welche durch Q'_1 und Q' gehen und zufolge dem Satze in Nr. 4 und 5 mit $Q'_1 Q'$ Winkel bilden, welche den geographischen Längen gleich sind, woraus hervorgeht, dass auch die Halbmesser dieser Kreise mit einer durch Q' parallel zu AX gezogenen Geraden dieselben Winkel einschliessen.

Betrachtet man nämlich die Gerade $Q'_1 Q'$ als einen Kreis von unendlich grossem Halbmesser, so giebt die durch Q' parallel zu AX gezogene Gerade die Richtung des Halbmessers an.

Die Mittelpunkte der verschiedenen Meridian-Abbildungen liegen hiernach auf AX (oder AX') und können wie folgt gefunden werden. Um Q' schlage man mit beliebiger Oeffnung einen Viertelkreis, ziehe den Radius $Q'0$ parallel zu AX und theile nun den Bogen vom Punkte 0 ab ein, z. B. von 10 zu 10 Grad wie in **Fig. V.** Zieht man dann durch die Theilpunkte die Radien von Q' aus und verlängert dieselben bis zum Durchschnitte mit AX, so sind die Schnittpunkte die gesuchten Mittelpunkte und man kann die Abbildungen der Meridiane erhalten, wenn man den Zirkel in diesen Punkten einsetzt, bis Q' öffnet und dann einen Kreisbogen von Q' nach Q'_1 schlägt. Für die Länge $\lambda = 40^0$ hat man beispielsweise auf dem Hilfskreise um Q' den Punkt D und der Mittelpunkt der Abbildung des Meridianes ist D', diese Abbildung selbst ist $Q'EQ'_1$. Auf gleiche Art sind in **Fig. V** in drei Quadranten die Abbildungen der Meridiane von 10 zu 10 Grad erhalten worden; für die rechts von $Q'_1 Q'$ liegenden Meridian-Abbildungen liegen natürlich die Mittelpunkte auf AX'.

Will man AD' berechnen, so erhält man diesen Werth aus der Gleichung

$$AD' = 2a \cot \lambda,$$

und zur Ermittelung von AE hat man die Gleichung

$$AE = 2a \tan \tfrac{1}{2} \lambda;$$

der Halbmesser $D'Q'$ endlich ist

$$D'Q' = 2a \operatorname{cosec} \lambda.$$

11. Wir kommen nun zur Abbildung der Parallelkreise. Da der Meridian von 90^0 Länge seiner Abbildung parallel liegt, so wird die letztere von den verschiedenen Parallelkreisen ganz in derselben Weise getheilt, wie der Meridian selbst. Will man also z. B. die Meridiane von 10 zu 10 Grad zeichnen, so theile man sich zunächst den Umfang des durch Q'_1 und Q' gehenden, um A als Mittelpunkt beschriebenen Kreises von 10 zu 10 Grad ein und beziffere die Theilpunkte von $X'X$ aus wie in **Fig. V** auf der untern Hälfte ersichtlich ist.

Da ferner ein Parallelkreis sämmtliche Meridiane rechtwinklig schneidet, so findet diese Eigenschaft auch bei den Abbildungen statt. Legt man daher in einem der vorhin erwähnten Theilpunkte der Abbildung des Meridianes von 90^0 Länge, z. B. in dem zu 60^0 Breite gehörigen Punkte F eine Tangente an diesen Kreis, so fällt

dieselbe in die Richtung des Radius desjenigen durch F gehenden Kreises, welcher den Meridian von 60° Breite repräsentirt. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist der Punkt G auf der Verlängerung von $Q'Q'_1$, durch welchen die erwähnte Tangente geht; denn in diesem Punkte schneiden sich die Tangenten, die man in F und F_1 an die Meridianabbildung von 90° Länge legen kann.

In gleicher Weise sind die Abbildungen der übrigen Parallelkreise in **Fig. V** gefunden worden, so dass diese Figur keiner weiteren Erläuterung mehr bedarf.

Setzt man die geographische Breite des Punktes $F = \varphi$, so ergiebt sich in **Fig. V**

$$AG = 2a \operatorname{cosec} \varphi \text{ und } FG = 2a \cot \varphi.$$

Ist also $\varphi = \lambda$, so ist $AG = D'Q'$ und $FG = AD'$. Man kann daher, wenn $2a = 1$ angenommen wird, die Werthe dieser Grössen aus folgender Tafel entnehmen.

$\varphi = \lambda$	cosec φ	cot φ	$\varphi = \lambda$	cosec φ	cot φ
0°	∞	∞	45°	1,4142	1,0000
5	11,4737	11,4301	50	1,3054	0,8391
10	5,7588	5,6713	55	1,2208	0,7002
15	3,8637	3,7321	60	1,1547	0,5774
20	2,9238	2,7475	65	1,1034	0,4663
23° 27′ 30″	2,5120	2,3044	66° 32′ 30″	1,0901	0,4340
25°	2,3662	2,1445	70°	1,0642	0,3640
30	2,0000	1,7321	75	1,0353	0,2679
35	1,7434	1,4281	80	1,0154	0,1763
40	1,5557	1,1918	85	1,0038	0,0875
			90	1,0000	0,0000

IV. Stereographische Horizontal-Projektion.

12. Die Bildebene berührt die Kugel in einem Punkte A, dessen geographische Breite α in dem Netz, **Taf. II, Fig. VI,** gleich 50° angenommen worden ist. Den durch A gehenden Meridian betrachten wir als ersten Meridian. Das Auge O liegt auf demselben Meridiane, dem Punkte O diametral gegenüber. Die Darstellung umfasst zunächst die den Punkt A umgebende Halbkugel, kann sich aber auch noch weiter erstrecken.

13. Der erste Meridian erscheint in der Abbildung als eine gerade Linie $Y'Y$ (nach Nr. 2 dieses §.).

14. Die Parallelkreise erscheinen in der Abbildung als Kreise, deren Mittelpunkte auf $Y'Y$ liegen.

Denn, da die Parallelkreise jeden Meridian, und also auch den ersten rechtwinklig schneiden, so schneiden ihre Abbildungen die Gerade $Y'Y$ rechtwinklig, d. h. die Mittelpunkte liegen auf dieser Geraden.

15. Wie die Abbildungen der Parallelkreise konstruirt werden, ist auf **Taf. I** aus **Fig. VI** ersichtlich.

Der mit dem Durchmesser $OA = 2a$ (5 Centim.) beschriebene, von 10 zu 10 Grad eingetheilte Kreis stellt den ersten Meridian dar, Q_1 und Q sind die Pole, O ist das Auge, A der Punkt von 50° geographischer Breite, auf dessen Horizont die Abbildung gemacht wird, B und B_1 sind Punkte des Aequators, die Tangente $Y'Y$ stellt die Abbildung des ersten Meridians vor. Ferner ist B' die Abbildung des Aequatorpunktes B, Q' diejenige des Poles Q; die Abbildung von Q_1 würde über die Grenzen unserer Zeichnung hinausfallen.

Setzt man die geographische Breite von A allgemein gleich α, so ist

$$AQ' = 2a \tan \frac{90^\circ - \alpha}{2}$$

und für den Punkt Q'_1, die Projektion von Q_1, hat man die Gleichung

$$AQ'_1 = -2a \cot \frac{90^\circ - \alpha}{2};$$

die Entfernung zwischen den beiden Punkten Q'_1 und Q' ist daher

$$Q'_1 Q' = 4a \sec \alpha.$$

16. Um nun einen beliebigen Parallelkreis von der Breite φ abzubilden, giebt man sich auf dem Kreise OQ_1Q die beiden Punkte D und E an, welche dieser Kreis mit dem Parallelkreise gemein hat, und projicirt sie von O aus auf $Y'Y$; die Entfernung der beiden Projektionen D' und E' ist der Durchmesser des Kreises, durch welchen dieser Parallelkreis dargestellt wird. Den Mittelpunkt kann man daher einfach durch Halbiren der Strecke $D'E'$ finden.

17. Fällt der eine der beiden Punkte D' oder E' zu weit hinaus, so kann man sich zur Auffindung des Mittelpunktes auch des in Nr. 6 bewiesenen Verfahrens bedienen. Man legt dann in D' oder E' eine Tangente an den ersten Meridian und verlängert dieselbe bis zum Schnittpunkte K mit der Verlängerung der Achse Q_1Q; die Projektion K' von K auf Y_1Y ist der gesuchte Mittelpunkt. In der **Fig. VI** sind K und K' nicht angegeben.

18. Will man die Lage der Punkte D' und E', sowie des Mittelpunktes K' durch Rechnung finden, so hat man dazu die drei Gleichungen

$$AD' = 2a \tan \frac{\varphi - \alpha}{2}, \qquad AE' = 2a \cot \frac{\varphi + \alpha}{2},$$

$$AK' = \tfrac{1}{2}(AD' + AE') = \frac{a \cos \alpha}{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \alpha) \cos \frac{1}{2}(\varphi - \alpha)}.$$

Für die beiden Punkte B und B_1 des Aequators, für welche $\varphi = 0$ ist, ergeben sich aus den drei letzten Gleichungen die Werthe

$$AB' = -2a \tan \frac{\alpha}{2}, \quad AB'_1 = 2a \cot \frac{\alpha}{2}, \quad AM' = 2a \cot \alpha,$$

wenn B'_1 die Projektion von B_1 und M' den Halbirungspunkt der Strecke $B'B'_1$ bedeutet. Die Punkte B'_1 und M' sind in der Figur nicht mit angegeben.

19. Die Konstruktion der Abbildungen der verschiedenen Parallelkreise hat nach der in Nr. 16 und 17 gegebenen Anleitung keinerlei Schwierigkeiten; nur ein Fall verdient noch besonderer Erwähnung.

Legen wir nämlich durch das Auge O selbst einen Parallelkreis, welcher den ersten Meridian ausser in O noch einmal in C schneidet, so ist dessen Projektion zufolge Nr. 2 eine gerade Linie, und zwar muss dieselbe dem in Nr. 14 Gesagten gemäss rechtwinklig auf $Y'Y$ stehen.

Auf **Taf. II** in **Fig. VI** ist C' die Projektion von C und $X'X$ die Abbildung des durch O und C gehenden Parallelkreises.

Man findet leicht aus der Figur, dass die Breite dieses Parallelkreises $BC = -\alpha$ ist.

Zur Berechnung von AC' liefert die erste der Formeln der Nr. 18, wenn man dort C' statt D' und $-\alpha$ statt φ setzt, die Gleichung

$$AC' = -2a \tan \alpha.$$

Vergleicht man diese Formel mit den Formeln der Nr. 15, so erkennt man leicht die Richtigkeit der Relation

$$AC' = \tfrac{1}{2}(AQ' + AQ'_1),$$

d. h. C' halbirt die Entfernung zwischen den Projektionen Q'_1 und Q' der beiden Pole.

20. Nachdem wir alles angegeben haben, was zur Konstruktion der Parallelkreise nothwendig erscheint, wenden wir uns nun zur Abbildung der Meridiane.

Da jeder Meridian ein grösster Kreis ist, so findet man den Mittelpunkt seiner Abbildung nach der in Nr. 6 angegebenen Regel, wenn man von O aus eine Gerade zieht, die zu seiner Ebene senkrecht steht und dieselbe bis zum Durchschnitt mit der Bildebene verlängert. Alle diese Geraden liegen aber in einer zum Aequator parallelen, also zur Achse $Q_1 Q$ der Kugel rechtwinkligen Ebene; denn die Achsen aller Cylinder, welche den Kugeln längs der einzelnen Meridiane umschrieben sind, liegen in der Aequatorebene. Mithin liegen die Mittelpunkte der Kreise, welche Abbildungen der Meridiane sind, in der Schnittlinie der Bildebene mit einer durch O senkrecht zu $Q_1 Q$ gelegten Ebene. Diese Ebene ist aber identisch mit der Ebene des von uns in der vorigen Nummer erwähnten Parallelkreises von der Breite $-\alpha$, und also liegen die Mittelpunkte der Abbildungen der Meridiane auf der Geraden $X'X$ (**Fig. VI**).

Die nähere Bestimmung dieser Mittelpunkte ergiebt sich aus dem Satze, dass diese Abbildungen die Abbildung $Y'Y$ des ersten Meridianes in Q' (und Q'_1) unter Winkeln schneiden, die den Längen der Meridiane gleich sind; dieselben Winkel müssen also auch die Halbmesser dieser Abbildungen mit einer durch Q' parallel zu

XX' gezogenen Geraden einschliessen. Um daher diese Mittelpunkte zu finden, schlägt man um Q' mit beliebiger Oeffnung einen Kreis, theilt ihn ein, etwa von 10 zu 10 Grad, wie in unserer Figur, und zieht die Radien nach den Theilpunkten, die man bis zum Durchschnitte mit $X'X$ verlängert. Setzt man dann den Zirkel der Reihe nach in den einzelnen Schnittpunkten ein und öffnet bis Q' (oder Q'_1), so kann man die Kreise schlagen, welche die einzelnen Meridiane darstellen.

In **Fig. VI** ist C' der Mittelpunkt für den Kreis von der Länge 90°; der mit 80 bezeichnete Punkt, links von C' ist der Mittelpunkt für die Abbildung des Meridianes von 80° Länge etc. Auf der durch B' gehenden Abbildung des Aequators, die etwas stärker angegeben ist, sind die Längen 10°, 20°, ..., 90° verzeichnet. Die Mittelpunkte für die Abbildungen der Meridiane von mehr als 90° Länge, deren Fortsetzung auf die linke Seite von $Y'Y$ fallen würde, dahin, wo sich unsere Erläuterungsfigur befindet, liegen rechts von C'.

Hiermit ist die Konstruktion des Netzes in **Fig. VI** nach allen Seiten erklärt. Dasselbe repräsentirt die Hälfte der Halbkugel; die Begrenzung erfolgt durch einen Kreis vom Halbmesser $2a$ mit dem Mittelpunkte A, die Abbildung des grössten Kugelkreises, der von O um 90° absteht.

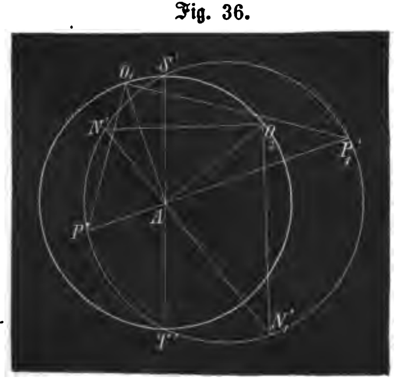
V. Verschiedene Aufgaben.

21. Gegeben sind zwei Punkte P' und N' der Karte; man soll die Abbildung des grössten Kreises konstruiren, der durch die entsprechenden Punkte P und N der Kugelfläche geht.

Ist der Mittelpunkt A der Karte bekannt, so kann man leicht auf AP' einen Punkt P'_1 und auf AN' einen Punkt N'_1 finden, welche auf dem gesuchten Kreise liegen. Diese Punkte sind nämlich die Abbildungen der beiden Punkte P_1 und N_1, welche auf der Kugel den Punkten P und N diametral gegenüber liegen.

Aus der Bemerkung, dass der Winkel POP_1 und also auch der Winkel $P'OP'_1$ ein rechter ist, erhellt sofort, dass man nur (**Fig. 36**) in A eine Senkrechte $AO_1 = 2a$ auf AP' und in O_1 wieder eine Senkrechte auf $P'O_1$ zu errichten braucht, um P'_1 zu finden; dieser Punkt ist nämlich der Schnittpunkt der letzten Senkrechten mit der Verlängerung von $P'A$. Ebenso errichtet man in A auf AN' die Senkrechte $AO_2 = 2a$ und in O_2 wieder eine Senkrechte auf $N'O_2$, welche die Verlängerung von $N'A$ in N'_1 schneidet. Die beiden Dreiecke $P'O_1P'_1$ und $N'O_2N'_1$ sind Nichts

Fig. 36.



weiter als die Dreiecke $P'OP'_1$ und $N'ON'_1$, in die Zeichenebene niedergeklappt.

Legt man jetzt durch drei von den vier Punkten P', P_1', N' und N_1' einen Kreis, so geht derselbe auch durch den vierten Punkt und ist die Abbildung des grössten Kugelkreises, welcher durch die Punkte P und N geht.

Noch ist darauf aufmerksam zu machen, dass die Punkte S' und T', in denen dieser Kreis den um A mit dem Halbmesser $2a$ beschriebenen (den Umfang der Karte) schneidet, in einer Geraden mit A liegen müssen. Diese Gerade ist nämlich die Abbildung eines grössten Kugelkreises, welcher durch zwei Paare diametral entgegengesetzter Punkte geht: durch A und O und durch die Punkte S und T, in denen sich der durch P und N gelegte und der von A und O überall um 90° abstehende Kreis schneiden.

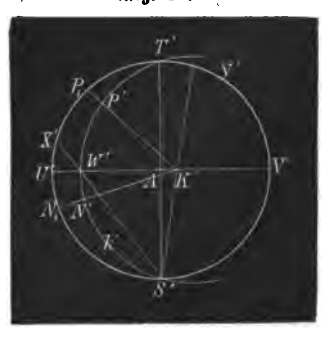
22. Die Abbildung K' des Poles K eines grössten Kreises k zu bestimmen. Diese Aufgabe ist mit grösster Leichtigkeit zu lösen, wenn man sich vorher von der Richtigkeit des folgenden Lehrsatzes überzeugt hat:

Zieht man durch die Projektion K' des Poles K eines grössten Kreises k zwei Gerade, so schneiden dieselben auf dem Umfangskreise und der Abbildung von k Bögen ab, deren Originale gleich lang sind.

In der That, denkt man sich zwei grösste Kugelkreise k und l, so ist die Gerade, welche ihre Pole K und L verbindet, gegen die Ebenen beider Kreise gleich geneigt, und schneidet sie in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkte; eine Ebene μ, die man um KL dreht, wird daher auf k und l gleiche Bögen abschneiden. Lässt man nun l mit dem von O um 90° abstehenden Kugelkreise, also L mit O zusammenfallen, so bleibt das vorige auch richtig. Die bewegliche Ebene μ schneidet aber die Kugel in einem durch O gehenden Kreise, dessen Projektion eine durch K' gehende Gerade ist. Zwei Lagen dieser Geraden schneiden sonach auf dem Umfangskreise und auf k' Bögen ab, deren Originale gleich lang sind, wie unser Satz behauptet.

Um nun die am Eingange dieser Nummer angegebene Aufgabe zu lösen, ziehe man zunächst den Durchmesser $S'T'$ des Umfangskreises, welcher durch dessen beide Schnittpunkte mit k' geht, und errichte darauf senkrecht den Durchmesser $U'V'$ (Fig. 37). Diese beiden Durchmesser sind die Abbildungen grösster Kugelkreise, die beide auf dem Umfangskreise senkrecht stehen und von denen der letztere auch auf k senkrecht steht, weil $U'V'$ und k' sich in W' rechtwinklig schneiden. Der Pol K' wird nun gefunden, indem man von W' aus ein Stück $W'K'$ auf $U'V'$ abträgt, so dass WK ein Viertelkreis ist. Hierzu dient der vorstehend bewiesene Satz.

Fig. 37.



Es ist, wie man leicht erkennt, S' die Abbildung des Poles von UV; man ziehe daher die Gerade $S'W'$, welche den Umfangskreis in X' schneidet, trage von X' aus den Bogen $X'Y'$ gleich einem Viertelkreis ab und ziehe die Gerade $S'Y'$, welche $U'V'$ in dem gesuchten Punkte K' schneidet.

23. Den Horizont k eines durch seine Projektion K' gegebenen Punktes K abzubilden. Weil in diesem Falle K der Pol von k ist, so hat man nur die in Nr. 22 und **Fig. 37** erläuterte Konstruktion umgekehrt auszuführen.

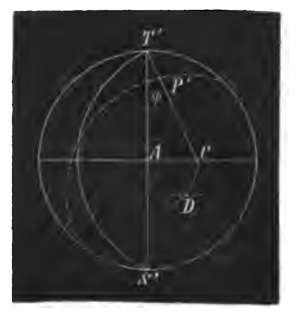
24. Die kürzeste Entfernung zweier Punkte P und N zu finden, deren Projektionen P' und N' gegeben sind. Man konstruire die Abbildung k' des grössten durch P und N gehenden Kugelkreises k, sowie die Abbildung K' des Poles K dieses Kreises, verbinde dann K' mit P' und N' durch gerade Linien (vergl. **Fig. 37**), welche den Umfangskreis in P_1 und N_1 schneiden. Der Bogen P_1N_1 hat dann so viel Grad als der Bogen PN, und da man die Vergrösserung des Umfangskreises kennt — bei unserer Lage der Bildebene ist dieser Kreis doppelt so gross als sein Original, — so ist damit auch die Länge des Bogens PN ermittelt.

25. Um auf einem grössten Kreise k von einem gegebenen Punkte P aus einen Bogen von bekannter Länge abzutragen, konstruire man die Abbildung des Poles K von k (**Fig. 37**), ziehe $K'P_1$ durch P', trage P_1N_1 entsprechend der gegebenen Länge auf dem Umfangskreise ab; dann schneidet N_1K' den Kreis k' im Punkte N' und das Bogenstück $P'N'$ ist die Abbildung des gesuchten Kreisbogens.

26. Gegeben seien die Projektion k' eines grössten Kugelkreises k und die Projektion P' eines Punktes P der Kugelfläche; man soll die Projektion l' des durch P gehenden Kugelkreises finden, der auf k senkrecht steht. Die Aufgabe wird gelöst, indem man die Abbildung K' des Poles von k und dann diejenige des durch K und P gehenden Kugelkreises, welcher l ist, konstruirt.

27. Die Abbildung eines grössten Kreises k zu konstruiren, welcher durch einen gegebenen Punkt geht und mit der Bildebene einen gegebenen Winkel ψ einschliesst.

Fig. 38.



Liegt der Punkt vom Auge O um 90° entfernt, seine Projektion also auf dem Umfangskreise, wie beispielsweise T' in **Fig. 38**, so ziehe man den Durchmesser $S'T'$ des Umfangskreises und den darauf senkrechten, auf welchem letzteren der Mittelpunkt C des gesuchten Kreises liegt. Da nun der Umfangskreis und der gesuchte Kreis den Winkel ψ einschliessen, so müssen auch die Radien AT' und CT' denselben Winkel einschliessen. Da-

mit ist C bestimmt und man kann nun den Kreis durch S' und T'' schlagen.

Ist aber der Punkt in einer anderen Lage, ist z. B. P' seine Projektion, so nehme man T'' willkürlich an und suche C wie vorher. Alsdann aber schlage man um A einen Kreisbogen mit der Oeffnung AC und um P' einen andern mit der Oeffnung $T''C$; beide schneiden sich im Punkte D, welches der Mittelpunkt des durch P' zu legenden (in **Fig. 38** strichpunktirten) Kreises ist.

28. Den Neigungswinkel zweier grössten Kreise ermittelt man, indem man die Abbildungen ihrer Pole konstruirt und die Entfernung dieser Pole misst.

29. Gegeben sei die Projektion P' eines Punktes P; man soll die Projektionen des Meridianes und des Parallelkreises finden, die durch ihn gehen. Man verbindet zunächst den Mittelpunkt A der Karte mit der Abbildung des Poles Q', und erhält dadurch die Linie $Y'Y$, auf welcher die Mittelpunkte der Parallelkreis-Abbildungen liegen (vergl. auf **Tafel II, Fig. VI**). Dann suche man auf die in Nr. 19 dieses Paragraphen angegebene Weise die Gerade $X'X$, auf welcher die Mittelpunkte für die Meridian-Bilder liegen. Zieht man dann $P'Q'$, halbirt diese Gerade und errichtet auf ihr im Halbirungspunkte eine Senkrechte, so schneidet diese die Linie $X'X$ im Mittelpunkte des durch Q' und P' gehenden Meridian-Bildes, welches man nunmehr zeichnen kann.

Errichtet man dann in P' auf dem Halbmesser des Meridian-Bildes eine Senkrechte, so ist diese ein Halbmesser des Parallelkreisbildes (weil beide Bilder sich gleich den Originalen rechtwinklig schneiden) und der Schnittpunkt mit $Y'Y$ ist der Mittelpunkt. Es kann also jetzt auch der Parallelkreis abgebildet werden.

VI. Vorzüge und Mängel der stereographischen Projektion. Historisches.

30. Ist P ein Punkt der Kugelfläche, der vom Punkte A um einen Bogen AP absteht, dessen Länge in Bogenmaass μ ist, so ist dessen Projektion P' von A um die Strecken

$$AP' = 2a \tan \frac{\mu}{2}$$

entfernt.

Es sei nun N ein dem Punkte P sehr nahe und auf dem grössten Kreise durch A, P und O gelegener Punkt der Kugel, die Grösse des Bogens AQ in Bogenmaass sei μ_1; dann ist

$$AQ' = 2a \tan \frac{\mu_1}{2}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$P'Q' = 2a\left(\tan \frac{\mu_1}{2} - \tan \frac{\mu}{2}\right) = 2a \frac{\sin \frac{\mu_1 - \mu}{2}}{\cos \frac{\mu_1}{2} \cos \frac{\mu}{2}},$$

und da andererseits $PQ = a\,(\mu_1 - \mu)$ ist, so ergiebt sich das Verhältniss zwischen Abbildung und Original

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{\sin \frac{\mu_1 - \mu}{2}}{\frac{\mu_1 - \mu}{2} \cdot \cos \frac{\mu_1}{2} \cos \frac{\mu}{2}}.$$

Will man die Linearvergrösserung $\varkappa$ für die kleinsten Theile erhalten, so hat man in dieser Formel $\mu_1 = \mu$ zu setzen; dann aber ist

$$\frac{\sin \frac{\mu_1 - \mu}{2}}{\frac{\mu_1 - \mu}{2}} = 1$$

und man erhält daher die Formel

$$\varkappa = \frac{1}{\cos^2 \frac{\mu}{2}}.$$

Da die stereographische Abbildung dem Originale in den kleinsten Theilchen ähnlich ist, so ist dieser Koefficient für alle Richtungen um den Punkt P herum gleich gross, während er bei der gnomonischen Abbildung nach der einen Richtung am grössten, nach der darauf senkrechten Richtung aber am kleinsten ist.

Wie bei der gnomonischen Projektion ist auch bei der stereographischen der Werth des Koefficienten $\varkappa$ nur von der Entfernung des Punktes P vom Punkte A abhängig, dagegen unabhängig von der Richtung, nach welcher hin der grösste Kugelkreis durch A und P liegt.

Auch bei der stereographischen Projektion wächst $\varkappa$, jemehr man sich von A entfernt, aber nicht in so starkem Maasse, wie bei der gnomonischen Projektion. Bei letzterer ist dieser Werth beispielsweise für die Winkel

$$\begin{array}{cccccc} \mu = & 0^0 & 30^0 & 45^0 & 60^0 & 90^0 \\ \varkappa = & 1, & 1{,}3333 & 2 & 4 & \infty, \end{array}$$

während bei der stereographischen Projektion für dieselben Winkel sich die Werthe ergeben

$$\varkappa = 1 \quad 1{,}0718 \quad 1{,}1716 \quad 1{,}3333 \quad 2.$$

Wie man sieht ist der Unterschied in den Werthen dieses Koefficienten für verschiedene Werthe von μ ein ziemlich beträchtlicher, wenn gleich nicht so gross wie bei der gnomonischen Projektion; letzterer Umstand ist auch der Grund, warum man die stereographische Abbildung zur Noth noch über die Halbkugel hinaus ausdehnen darf, freilich mit beträchtlicher Vergrösserung der Linien am Rande.

31. Die Flächenvergrösserung ist

$$\varkappa^2 = \frac{1}{\cos^4 \frac{\varphi}{2}}.$$

32. Die Hauptvorzüge der stereographischen Projektion bestehen

a. in der Bequemlichkeit, mit welcher sich die Abbildungen der Meridiane und Parallelkreise herstellen lassen, welche gleich ihren Originalen Kreise sind, und

b. in dem Umstande, dass die Abbildung dem Originale in den kleinsten Theilen ähnlich ist.

Diesen Vorzügen stehen aber leider Mängel gegenüber, welche die Verwendbarkeit dieser Methode bedeutend beschränken. Sie findet hauptsächlich zur Darstellung von Planigloben Verwendung.

Diese Mängel sind

a. die starken Aenderungen in der Linear- und mehr noch in der Flächenvergrösserung, welche von den Verhältnissen der Linien und Flächen am Rande und in der Mitte der Karte ganz falsche Vorstellungen zu erwecken geeignet ist, und dann noch der Umstand,

b. dass die stereographische — wie auch die gnomonische — Projektion die Erdoberfläche eigentlich von der Innenseite zeigt, daher auch beim Anblick des Kartennetzes nicht der Eindruck entsteht, als sähe man eine erhabene Kugel, sondern als blicke man in eine Hohlkugel. Konsequent sollte man dann auch die Länder etc. so in das Netz einzeichnen, wie sie, von der Innenseite der Kugel aus gesehen, liegen, also die östlicheren Punkte links, die westlichen rechts. Dies thut man aber nicht, vielmehr zeichnet man den Osten rechts, den Westen links. Dieser Umstand giebt den Ansichten der Erde, die man nach der stereographischen Methode entwirft, ein eigenthümliches, unnatürliches Aussehen. Bei Abbildungen der Himmelskugel dagegen wirkt derselbe nicht störend.

33. Die stereographische Projektion ist schon seit alter Zeit bekannt, bereits bei den Schriftstellern des klassischen Alterthums wird sie erwähnt. Der Neuplatoniker Synesius, welcher im Jahre 410 n. Chr. Bischof von Ptolemais wurde, nennt in seiner Schrift *De dono astrolabii* den berühmten Astronomen Hipparch (160 — 125 v. Chr.) als den Erfinder. Das älteste Werk aus dem Alterthume aber, welches diese Methode behandelt, ist das *Planisphaerium ad Syrum* des Ptolemäus, eine Schrift, von der wir freilich nicht mehr das griechische Original, sondern nur noch die arabische, mit dem Kommentar eines Gelehrten Namens Molsem versehene Uebersetzung besitzen, von welcher dann Rudolph Brughensis eine zum ersten Male am Schlusse der Geographie des Ptolemäus (Rom 1507) abgedruckte lateinische Uebersetzung geliefert hat. Eine korrektere Uebersetzung nebst Kommentar gab Commandinus im Jahre 1558 in Venedig heraus. Bei Ptolemäus findet sich indessen der Satz, dass die Abbildung eines nicht durch das Auge gehenden Kreises stets wieder ein Kreis ist, noch nicht

in voller Allgemeinheit, sondern nur für einzelne besondere Fälle bewiesen. Der Erste, welcher diesen Satz in vollständiger Allgemeinheit ausgesprochen hat, ist der mittelalterliche Mathematiker Jordan Nemorarius, welcher im dreizehnten Jahrhunderte lebte. Derselbe schrieb ein Werk *de Planisphaerio*, welches diese Projektion behandelt und im sechszehnten Jahrhunderte zusammen mit dem oben erwähnten gleichnamigen Werke des Ptolemäus veröffentlicht worden ist. Jordan Nemorarius nimmt übrigens die Bildebene so, wie wir es vorstehend gethan haben, als Berührungsebene der Kugel an, während Ptolemäus dieselbe durch den Kugelmittelpunkt legt.

Nach dem Wiederaufblühen der Wissenschaften haben ins besondere die Jesuiten Clavius, Aguilonius (François d'Aguillon), Tacquet und Deschales die stereographische Projektion mit grossem Fleisse behandelt. Von Aguilonius rührt auch der Name „stereographische" Projektion, die sich zuerst in seiner Optik angewandt findet.*)

Die wichtige Eigenschaft, dass die Abbildungen zweier Kugelkreise sich unter demselben Winkel schneiden, wie diese selbst, ist weder von Ptolemäus, noch von Jordanns bemerkt worden. Delambre giebt im dritten Bande seines *Traité d'Astronomie* an, dass er diese Eigenschaft zuerst in einem Werke von Robertston über Navigation gefunden habe, das 1754 erschienen. Indessen macht schon Halley in einer im XVIII. Bande der *Philosophical Transaction* veröffentlichten Abhandlung *(An easy demonstration of the analogy of logarithmic tangents to the Meridian line etc.)* von diesem Satze Gebrauch, den er von Moivre mitgetheilt erhalten; er fügt indessen bei, dass bereits früher Hooke denselben der kgl. Societät vorgetragen habe.

Die in Nr. 6 mitgetheilte Konstruktion für die Mittelpunkte der Kreise in der Abbildung endlich rührt von dem französischen Akademiker Michel Chasles her, der sie zuerst in den *Eléments de Géométrie à trois dimensions* von Hachette im Jahre 1817 veröffentlicht hat.

Die Anwendung der stereographischen Projektion zur Konstruktion von Landkarten datirt aus dem Anfange des sechszehnten Jahrhunderts. Bei uns in Deutschland hat sie im vorigen Jahrhunderte namentlich Haase in Leipzig in Aufnahme gebracht, der schon in seiner im Jahre 1717 gehaltenen Disputation *Sciagraphia integri tractatus de constructione mapparum omnis generis* darauf aufmerksam machte, dass seine stereographische Horizontalprojektion die grösstmögliche Aehnlichkeit wahre.

Der Bequemlichkeit ihrer Herstellung wegen wird die stereographische Projektion viel zur Konstruktion von Planigloben ver-

*) *Aguilonii Opticorum libri sex. Paris 1613, fol. „Quare tametsi stereographices nomine nusquam vocatum hoc projectionis genus reperimus; quia tamen nec alio quidem ullo solitum est appellari, placuit hoc nomen usurpare, quod nobis in praesenti visum est ad rem ipsam quam maxime accommodatum." (Praefatio.)* Vergl. Chasles, Geschichte der Geometrie. Deutsch von Sohncke. Halle 1839. S. 604.

wandt. So findet sich z. B. die Horizontalprojektion für $\alpha = 50^\circ$ sehr gewöhnlich zur Darstellung der beiden Hemisphären, welche das meiste Land oder Meer besitzen, benutzt. Einen eigenthümlichen Gebrauch zur Darstellung der ganzen Erdoberfläche hat im Jahre 1833 J. W. Woolgar gemacht. Er projicirt nämlich die ganze Erdoberfläche auf die vier Seitenflächen eines der Erdkugel umschriebenen regulären Tetraëders, dessen Achse durch die beiden Pole geht und dessen Grundfläche die Kugel im Südpole berührt. Die drei Seitenflächen berühren die Kugel in 19° 28′ 16″ nördl. Breite in drei Punkten, deren Längen um 120° differiren. Die Abbildung auf jeder Seitenfläche des Tetraëders erstreckt sich nicht über 70° 30′ und die Linearvergrösserung wächst daher nur bis $\varkappa = 1,5$, nicht bis 2, wie es der Fall ist, wenn man die ganze Halbkugel auf einer Ebene abbildet.

§. 10.

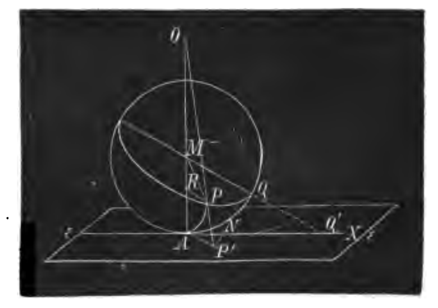
Anderweitige perspektivische Abbildungen.

I. Allgemeine Sätze.

1. Wir setzen jetzt voraus, die Bildebene ε berühre die Kugel vom Halbmesser a im Punkte A, dessen geographische Breite α ist, das Auge O aber liege auf der Verlängerung des durch A gehenden Kugeldurchmessers in einer Entfernung $MO = d$ vom Mittelpunkte M. Dies ist allerdings nicht die allgemeinste Annahme, welche man machen kann, denn man könnte den Punkt O auch ausserhalb dieses Durchmessers und seiner Verlängerung annehmen; da aber beim Kartenzeichnen eine solche allgemeinere Annahme nicht Verwendung findet, so wollen wir sie hier auch nicht machen, zumal sie nur eine unnütze Komplikation der Formeln und Konstruktionen herbeiführen würde.

2. In **Fig. 39** sei P der Punkt auf der Kugel, welcher von O aus projicirt werden soll, P' sei seine Projektion auf die Ebene ε; Q ein Pol, dessen Abstand von A $90^\circ - \alpha$ beträgt, PQ das Komplement der Breite, also gleich $90^\circ - \varphi$, endlich PQA die Länge λ des Punktes P. Legen wir dann durch P, A und O einen grössten Kreis, so projicirt sich derselbe in eine gerade Linie, die mit der von A nach der Projektion Q' des Poles gehenden Gerade AX einen Winkel XAP' gleich dem Winkel QAP einschliesst. Es ist dann ferner, wenn R den Fusspunkt der Senkrechten bedeutet, die man von P auf AO fällen kann,

Fig. 39.



$$AP' = \frac{PR \cdot OA}{OR} = \frac{OA \cdot a \sin PMA}{OM + a \cos PMA}.$$

Der Winkel PMA wird aber gemessen durch den Bogen AP und es ist daher nach einem Fundamentalsatze der sphärischen Trigonometrie im Dreiecke APQ

$$\cos PMA = \cos AP = \cos QP \cos QA + \sin QP \sin QA \cos PQA$$

oder

$$\cos PMA = \sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha \cos \lambda.$$

Man hat demnach die Gleichung

$$AP' = \frac{OA \cdot a \sin PMA}{OM + a (\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha \cos \lambda)}.$$

Fällt man nun von P' auf AX die Senkrechte $P'N = y$ und bezeichnet AN mit x, so ist

$$x = AP' \cdot \cos PAQ \text{ und } y = AP' \cdot \sin PAQ.$$

In der Formel für x tritt demnach, wenn man den obenstehenden Werth für AP' einsetzt, das Produkt $\sin PMA \cos PAQ = \sin AP \cos PAQ$ als Faktor von $OA \cdot a$ auf. Es ist aber im sphärischen Dreiecke APQ

$$\cos PQ = \cos AP \cos AQ + \sin AP \cdot \sin AQ \cos PAQ,$$

mithin

$$\sin AP \cos PAQ = \frac{\cos PQ - \cos AP \cos AQ}{\sin AQ}$$
$$= \frac{\sin \varphi - \cos AP \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Setzt man rechts statt $\cos AP$ den oben stehenden Werth ein:

$$\cos AP = \sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha \cos \lambda,$$

so ergiebt sich als Faktor von $OA \cdot a$ in der Formel für x nach einfacher Umformung

$$\sin AP \cos PAQ = \sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha \cos \lambda.$$

Was ferner der Faktor von $OA \cdot a$ in der Formel für y anlangt, so ist derselbe

$$\sin PAQ \cdot \sin AP = \sin PQA \cdot \sin PQ = \sin \lambda \cos \varphi.$$

Setzt man nun noch $MO = d$ und also $OA = d + a$, so ergeben sich die Formeln

$$(1) \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{(d + a)\, a\, (\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha \cos \lambda)}{d + a (\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha \cos \lambda)}, \\ y &= \frac{(d + a)\, a \sin \lambda \cos \varphi}{d + a (\sin \varphi \sin \alpha + \cos \varphi \cos \alpha \cos \lambda)}. \end{aligned} \right.$$

Damit sind die beiden Koordinaten eines Punktes von der Breite φ und der Länge λ gefunden.

Die Aufgabe gestaltet sich sehr einfach, wenn man den Punkt A in einen Pol verlegt.

II. Die Aequatorialprojektion.

3. Für $\alpha = 90^0$ geben die vorstehenden Gleichungen (1) die folgenden einfacheren Werthe von x und y

$$(2) \qquad x = -\frac{(d+a)\cos\varphi\cos\lambda}{d+a\sin\varphi}, \quad y = \frac{(d+a)\,a\sin\lambda\cos\varphi}{d+a\sin\varphi}.$$

Eliminirt man die Länge λ aus diesen Gleichungen, so erhält man

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{(d+a)\,a\cos\varphi}{d+a\sin\varphi}\right)^2,$$

woraus ersichtlich, dass die Abbildung eines Parallelkreises stets ein um A als Mittelpunkt beschriebener Kreis ist.

Dagegen führt die Elimination der Breite φ aus den Gleichungen (2) zu der Gleichung

$$\frac{y}{x} = -\tan\varphi;$$

also ist die Projektion jedes Meridianes eine durch A gehende Gerade und die Abbildungen der verschiedenen Meridiane bilden mit einander dieselben Winkel, wie die Meridiane selbst.

Beide Resultate sind geometrisch ohne Weiteres klar.

Auf **Taf. II** giebt uns **Fig. VII** den vierten Theil der Abbildung einer Halbkugel. Um M als Mittelpunkt ist dem Halbmesser a ein Kreis beschrieben, der von A aus in gleiche Theile von je 10 Grad getheilt ist. Die Theilungspunkte (10 bis 90 in der Figur) sind mit dem auf der Verlängerung des Durchmessers AQ_1 gelegenen Punkte O verbunden und die Verbindungslinien bis zu ihren Durchschnitten mit der in A an den Theilkreis gelegten Tangente. Durch diese Punkte gehen die Abbildungen der Parallelkreise. Ausserdem zeigt die Figur noch von 10 zu 10 Grad die geradlinigen Abbildungen der Meridiane. Wie man sieht, wird der dem Punkte O abgewendete Theil der Kugelfläche abgebildet, und man hat dabei nicht nöthig, sich auf die Halbkugel einzuschränken.

Das Gesetz, nach welchem in dieser Figur die Lage des Punktes O bestimmt worden ist, wird in einer besondern Abtheilung dieses Paragraphen weiter besprochen werden.

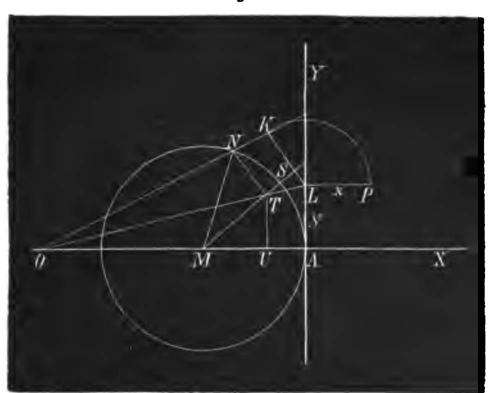
III. Die Meridianprojektion.

4. Wir nehmen jetzt den Punkt A auf dem Aequator an, setzen also $\alpha = 0$. Die Abbildung des ersten Meridianes fällt dann mit der Achse der x, diejenige des Aequators mit der Achse der y zusammen und die Koordinaten der Abbildung eines Punktes von der Länge λ und der Breite φ werden

$$(3) \qquad x = \frac{(d+a)\,a\sin\varphi}{d+a\cos\varphi\cos\lambda}, \quad y = \frac{(d+a)\,a\sin\lambda\cos\varphi}{d+a\cos\varphi\cos\lambda}.$$

Man kann dieselben wie folgt konstruiren (vergl. **Fig. 40**).

Fig. 40.



Um den auf der x-Achse gelegenen Punkt M konstruire man mit dem Halbmesser $MA = a$ einen Kreis, der durch den Koordinatenanfang A geht. Auf demselben trage man den Bogen AS gleich der Länge λ und nach derselben Richtung den Bogen SN gleich der Breite φ ab, fälle von N auf den Halbmesser MS die Senkrechte NT und verbinde T mit dem auf der negativen Seite der x-Achse in der Entfernung $AO = d + a$ liegenden Punkte O; die Gerade OT schneidet dann die y-Achse im Punkte L und es ist $AL = y$. Denn man hat, wenn TU senkrecht auf MA,

$$MT = a \cos \varphi, \quad TU = a \cos \varphi \sin \lambda, \quad MU = a \cos \varphi \cos \lambda,$$
$$OU = d + a \cos \varphi \cos \lambda,$$

also

$$AL = \frac{AO \cdot TU}{OU} = \frac{(d+a)\, a \cos \varphi \sin \lambda}{d + a \cos \varphi \cos \lambda} = y.$$

Zieht man ferner vom Punkte L aus parallel zu TN die Gerade LK bis zur Verlängerung von ON, so ist diese Strecke $LK = x$, und wenn man LP parallel zu OX und gleich LK macht, so ist P die Projektion eines Punktes von der Breite φ und der Länge λ. Denn es ist

$$LK = \frac{TN \cdot OL}{OT} = \frac{OA \cdot TN}{OU} = \frac{(d+a)\, a \sin \varphi}{d + a \cos \varphi \cos \lambda} = x.$$

Behält man denselben Punkt S, also dieselbe Länge λ bei, nimmt aber für die Breite $\varphi = SN$ verschiedene Werthe, so kann man sich beliebig viele Punkte des Meridianes von der Länge λ projiciren und durch Verbindung der gewonnenen Punkte die Projektion dieses Meridianes selbst erhalten.

Da in (3) der Werth von x sein Zeichen ändert, wenn die Breite φ negativ wird, so liegt die Abbildung eines Meridianes symmetrisch zur Achse OY oder zur Abbildung des Aequators.

Konstruirt man sich auf diese Weise die Abbildungen verschiedener Meridiane und verbindet die in ihnen liegenden Punkte gleicher Breite, so erhält man auch die Abbildungen der Parallelkreise.

Da in (3) die Ordinate y ihr Vorzeichen ändert, wenn λ negativ wird, so liegt die Abbildung eines Parallelkreises symmetrisch zur Achse der x oder zur Abbildung des ersten Meridianes.

5. Als Gleichung der **Abbildung eines Meridianes** ergiebt sich aus (3) durch Elimination von φ

$$(4)\quad x^2 d^2 + (d^2 - a^2 \cos^2\lambda)\left[y + \frac{(d+a)\,a^2 \cos\lambda \sin y}{d^2 - a^2 \cos^2\lambda}\right]^2 = \frac{d^2 a^2 (d^2 + a^2) \sin^2\lambda}{d^2 - a^2 \cos^2\lambda}.$$

Nun drückt nach den Erörterungen des §. 3 die auf rechtwinklige Koordinaten bezogene Gleichung

$$mx^2 + n\left(y + \frac{p}{n}\right)^2 = q$$

einen Kegelschnitt aus, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$x = 0 \text{ und } y = -\frac{p}{n}$$

hat, und zwar eine Ellipse, wenn m und n gleiche, eine Hyperbel, wenn sie entgegengesetzte Vorzeichen haben, dagegen eine Parabel, wenn $n = 0$ ist.

Sonach bedeutet auch Gleichung (4) einen Kegelschnitt, dessen Mittelpunktskoordinaten

$$x = 0 \text{ und } y = -\frac{(d+a)\,a^2 \cos\lambda \sin y}{d^2 - a^2 \cos^2\lambda}$$

sind, und zwar eine

Ellipse,	Hyperbel,	Parabel,

jenachdem

$d > a \cos\lambda$	$d < a \cos\lambda$	$d = a \cos\lambda$

ist.

Dagegen erhält man aus (3) durch Elimination von λ die Gleichung der **Abbildung eines Parallelkreises**

$$(5)\quad y^2 a^2 \sin^2\varphi + (d^2 - a^2 \cos^2\varphi)\left[x - \frac{(d+a)\,ad \sin\varphi}{d^2 - a^2 \cos^2\varphi}\right]^2 = \frac{(d+a)^2 a^4 \sin^2\varphi}{d^2 - a^2 \cos^2\varphi}.$$

Diese Abbildung ist sonach ein Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$x = \frac{(d+a)\,ad \sin\varphi}{d^2 - a^2 \cos^2\varphi},\ y = 0$$

hat, und zwar eine

Ellipse,	Hyperbel,	Parabel,

wenn

$d > a \cos\varphi$	$d < a \cos\varphi$	$d = a \cos\varphi$

ist.

Sobald der Punkt O ausserhalb der Kugel liegt, ist $d > a$ und also um so mehr $d > a \cos\lambda$ oder $a \cos\varphi$, und mithin **die Abbildung eines Meridianes oder Parallelkreises stets eine Ellipse.**

Man erkennt dies auch geometrisch. Zieht man nämlich von O aus Tangenten an die Kugel, so bilden dieselben die Mantel-

fläche eines geraden Kreiskegels; jede zu OM senkrechte Ebene wird von diesem Kegel in einem Kreise k geschnitten. Ist nun irgend ein Kugelkreis l zu projiciren, so liegen die Projektionsstrahlen im Allgemeinen im Innern dieses Kegels, nur einzelne können sich auf der Kegelfläche selbst befinden; folglich liegt die Projektion von l im Innern von k, ist also auf ein endliches Gebiet beschränkt und daher eine Ellipse.

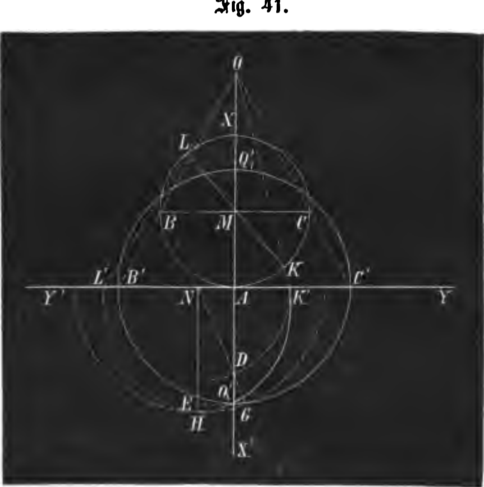
6. Die Konstruktion der Abbildungen der Meridiane und Parallelkreise kann zwar auf Grund der aus den Gleichungen (4) und (5) zu entnehmenden Werthe für die Grösse der Achsen und die Lage des Mittelpunktes erfolgen; doch ist dies noch umständlicher als die Befolgung der in Nummer 4 gegebenen Regel. Einfacher gestaltet sich die Konstruktion nach folgenden Regeln, wobei wir voraussetzen wollen, dass O ausserhalb der Kugel liegt, die gesuchten Kurven also Ellipsen sind.

Zunächst behandeln wir die Meridiane.

Der erste Meridian wird durch die Koordinatenachse der x (Fig. 41) dargestellt, wie bereits erwähnt worden ist.

Um den Meridian von 90° Länge zu projiciren, gebe man sich auf der x-Achse in der Entfernung $AM = a$ vom Anfangspunkte der Koordinaten den Punkt M an und schlage um denselben einen durch A gehenden Kreis. Dann ziehe man den Durchmesser BC, welcher parallel zur y-Achse geht, und verbinde B und C mit dem auf der x-Achse in der Entfernung $MO = d$ von M gelegenen Projektionscentrum; die Verbindungslinien OB und OC schneiden die y-Achse in den Punkten B' und C', und wenn man um A einen durch B' und C' gehenden Kreis beschreibt, so ist dieser die Projektion des Meridianes von 90° Länge. Die auf der x-Achse gelegenen Punkte Q' und Q'_1 dieses Kreises sind die Abbildungen der beiden Pole.

Fig. 41.



Wir wollen diesen Kreis im Folgenden kurz den „Umfangskreis" nennen.

Soll endlich der Meridian von der Länge λ abgebildet werden, so trage man zunächst auf dem um M beschriebenen Kreise den Bogen $AK = \lambda$ ab und ziehe den Durchmesser KL. Die Projektionen K' und L' der beiden Endpunkte desselben bestimmen die Endpunkte der auf der y-Achse liegenden Achse der

Meridian-Ellipse; der Halbirungspunkt N von $K'L'$ ist der Mittelpunkt dieser Ellipse.

Da ferner die Meridiane sämmtlich durch die beiden Pole gehen, so müssen alle Meridianellipsen mit dem Umfangskreise die Punkte Q' und Q'_1 gemein haben. Zieht man daher NH senkrecht zur y-Achse, schlägt dann um N mit dem Halbmesser $NK' = NL'$ einen Kreis, welcher die x-Achse in D schneidet, fällt auf NH von Q' aus die Senkrechte $Q'E$, die man so weit verlängert, bis sie die Verlängerung von ND in G schneidet, und macht schliesslich $NH = NG$, so ist H der eine Endpunkt der zweiten Achse, und man kann nun die Ellipse nach einer der in §. 4 angegebenen Methoden zeichnen. In **Fig. 41** ist nur der innerhalb des Umfangskreises liegende Theil $K'Q'$ ausgezogen, der andere, $Q'HL'$ dagegen blos punktirt.

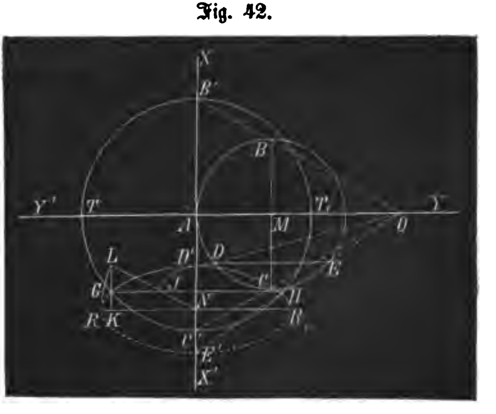
Man erkennt leicht, dass die hier zuletzt angegebene Konstruktion von NH nichts weiter ist, als eine Umkehrung des Verfahrens in Nr. 3 des §. 4.

Von der Richtigkeit der ganzen Konstruktion überzeugt man sich aber bald, wenn man sich die Kugel längs des Aequators durchschnitten und dann den Aequator in die Zeichenebene umgeklappt denkt; er wird hier durch den Kreis um M repräsentirt.

Denkt man sich dagegen die Kugel längs des ersten Meridianes durchschnitten und dann die Schnittfigur in die Zeichenebene umgeklappt, so ergiebt sich eine einfache Konstruktion für die Abbildung der Parallelkreise.

Auf der y-Achse (Abbildung des Aequators) trage man (**Fig. 42**) $AM = a$ und $AO = a + d$ ab, schlage um M einen durch A gehenden Kreis, ziehe in demselben den zur x-Achse parallelen Durchmesser BC, projicire die Punkte B und C von O aus und erhält so die Punkte B' und C' auf der x-Achse, welche den Durchmesser des Umfangskreises begrenzen. Dann trage man auf dem um M beschriebenen Kreise den Bogen AD gleich der gegebenen Breite φ an, ziehe die Sehne DE parallel AY und projicire D und E von O aus auf die x-Achse. Die Entfernung zwischen den beiden Projektionen D' und E' ist die eine Achse der gesuchten Ellipse, welche den Parallelkreis von der Breite φ repräsentirt. Ausserdem geht diese Ellipse noch durch den Punkt G und H des Umfangskreises, für welche Bogen $TG = T_1H = \varphi$ ist. Analog wie oben kann man dann die andere Achse der Ellipse zeichnen, indem man $C'D'$ in N halbirt, NR parallel zur y-Achse zieht, um N einen durch D,

Fig. 42.



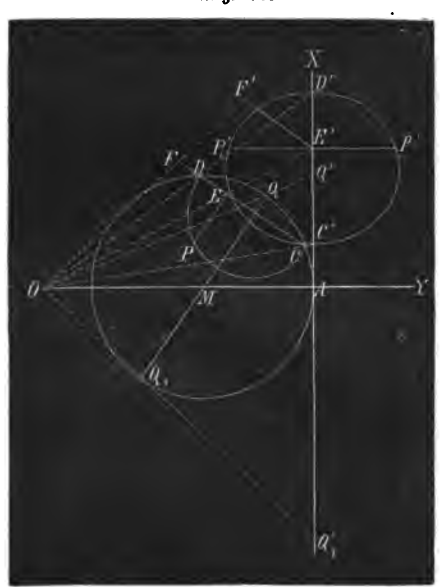
gehenden Bogen schlägt, welcher GH in J schneidet, NJ zieht und bis zum Durchschnittspunkte L mit der von G aus auf NR gezogenen Senkrechten GK verlängert; macht man dann zuletzt noch $NR = NR_1 = NL$, so ist RR_1 die zweite Achse der Ellipse. In **Fig. 42** ist das ausserhalb des Umfangskreises liegende Stück dieser Kurve nur punktirt angegeben.

IV. Die Horizontal-Projektion.

7. Da die Formeln (1) zu komplicirt sind, um aus ihnen bequeme Konstruktionen abzuleiten, so wendet man lieber einfache geometrische Betrachtungen an, um zu leichten Zeichnungsmethoden für die Abbildungen der Parallelkreise oder Meridiane zu gelangen.

In beistehender **Fig. 43** ist die Art und Weise, wie man die Abbildung eines beliebigen Parallelkreises zeichnen kann, deutlich gemacht. Auf der einen Seite der y-Achse sind die Punkte M und O angegeben, so dass $MA = a$ und $OM = d$ ist. Um M ist der Kreis mit dem Halbmesser $MA = a$ beschrieben, welcher den ersten Meridian, in die Zeichenebene umgeklappt, darstellt. Die Abbildung dieses Meridianes fällt, wie wir schon wissen, auf die Achse der x, und es ist leicht beliebige Punkte dieses Meridianes zu projiciren.

Fig. 43.



Trägt man den Bogen $AQ = 90^0 - \alpha$ ab, so sind Q und der diametral entgegengesetzte Punkt Q_1 die beiden Pole und die Schnittpunkte der Geraden OQ und OQ_1 mit der x-Achse; die Punkte Q' und Q'_1, die Abbildungen der Pole.

Macht man ferner $QC = QD = 90^0 - \varphi$, so sind C und D die beiden in der Ebene des ersten Meridianes liegenden Punkte des Parallelkreises von der Breite φ; ihre Projektionen C' und D' bestimmen auf der Achse der x die eine Achse der Ellipse, als welche sich der ganze Parallelkreis projicirt.

Um zur Projektion eines beliebigen, der Länge λ entsprechenden Punktes dieses Parallelkreises zu gelangen, denke man sich für einen Augenblick die Kugel und die Zeichenebene in ihrer richtigen Lage gegen einander. Von dem zu projicirenden Punkte P fälle man dann eine Senkrechte auf CD, deren Fusspunkt E sein möge, und projicire E sowohl als P. Die Projektion E' von E fällt auf die x-Achse, die von P aber, also

P', kommt so zu liegen, dass $P'E'$ senkrecht auf der Ebene $OE'A$, also senkrecht auf OE' und AX steht. Sonach ist $P'E'$ parallel zu PE und die Länge dieser Linie ist

$$P'E' = \frac{PE \cdot OE'}{OE}.$$

Diese Länge kann man aber durch eine Konstruktion in der Zeichenebene erhalten, indem man (**Fig. 43**) über CD einen Halbkreis konstruirt, auf diesem den Bogen CP gleich der Länge λ des abzubildenden Punktes abträgt, PE senkrecht auf CD zieht, dann $EF = PE$ abträgt, O mit F verbindet und soweit verlängert, bis diese Linie wie durch E' parallel mit CD gezogene Gerade in F' schneidet. Dann ist

$$E'F' = \frac{EF \cdot OE'}{OE},$$

und wenn man senkrecht zur x-Achse die Linien $E'P' = E'P'_1 = E'F'$ errichtet, so sind P' und P'_1 die Projektionen der Punkte auf unserem Parallelkreise, welche die Länge $\pm \lambda$ haben.

Konstruirt man auf diese Art eine hinlängliche Anzahl von Punkten, so kann man die elliptische Abbildung des Parallelkreises erhalten.

Wenn man dann auf den Abbildungen der verschiedenen Parallelkreise die Punkte gleicher Länge verbindet, so erhält man die Abbildung des Meridianes von dieser Länge.

Die Abbildung umfasst zunächst den Theil der Kugelfläche, welche den Punkt A umgiebt; wir sehen also, wie bei den vorher besprochenen speciellen Abbildungsarten, auf der Karte eigentlich die innere, konkave Seite der Kugelfläche. Uebrigens ist die Karte nicht beschränkt auf die Halbkugel, sondern sie kann einen grösseren Theil der Kugelfläche umfassen, wie wir dies z. B. auf **Taf. II Fig. VIII** sehen, welche weiter unten noch specieller besprochen werden wird.

V. Konstruktion der Entfernung zweier Punkte.

8. Die kürzeste Entfernung eines Punktes P vom Mittelpunkte A der Karte wird durch die Gerade AP' dargestellt, welche A mit der Projektion P' des Punktes P verbindet. Um diese Entfernung in Gradmaass zu finden, errichte man in A auf AP' eine Senkrechte, trage auf ihr $AM = a$ ab, schlage um M einen durch A gehenden Kreis, trage auf der Verlängerung von AM das Stück $MO = d$ ab und ziehe die Gerade OP', welche den Kreis zunächst A im Punkte P schneidet. AP ist dann die gesuchte Grösse.

9. Sind die Projektionen P' und N' zweier Punkte P und N der Kugelfläche gegeben, so genügt es, die wahre Länge der Sehne PN zu ermitteln, diese dann in dem Kreise vom Halbmesser a abzutragen, und der Bogen, welcher die Sehne umspannt, giebt die wahre Länge von PN an. Nun findet man aber, wenn man die Konstruktion der vorigen Nummer für P und N ausführt, die Längen

OP' und ON', und wenn man mit ihnen und $P'N'$ das Dreieck $OP'N'$ konstruirt, auf der Seite OP' die gefundene Grösse OP und auf ON' die Länge ON abträgt, so ergiebt sich sofort die Länge der Sehne PN.

VI. Aenderung der Linien, Winkel und Flächen.

10. Bezeichnet man die Entfernung eines Kugelpunktes P vom Punkte A in Bogenmaass mit μ, so führen die Betrachtungen der Nr. 2 dieses Paragraphen zu der Formel

$$AP' = \frac{a(d+a)\sin\mu}{d+a\cos\mu}.$$

Ist P_1 ein Punkt, der mit A und P auf demselben grössten Kreise liegt, und ist Bogen $AP_1 = \mu_1$, so hat man für die Projektion P'_1 und P_1 die analoge Gleichung

$$AP'_1 = \frac{a(d+a)\sin\mu_1}{d+a\cos\mu_1},$$

und aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$P'P'_1 = a(d+a)\frac{a\sin(\mu_1-\mu)+d(\sin\mu_1-\sin\mu)}{(d+a\cos\mu_1)(d+a\cos\mu)}.$$

Andererseits aber ist

$$PP_1 = a(\mu_1-\mu),$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man das Verhältniss für die Linearvergrösserung in Richtung des grössten Kreises durch A

$$\varkappa'' = \frac{P'P'_1}{PP_1},$$

wenn man $\mu_1 - \mu = 0$ setzt. Unter Berücksichtigung des Umstandes, dass für $\mu_1 - \mu = 0$

$$\frac{\sin(\mu_1-\mu)}{\mu_1-\mu} = 1$$

$$\frac{\sin(\mu_1-\mu)}{\mu_1-\mu} = \frac{\cos\frac{\mu_1+\mu}{2}\sin\frac{\mu_1-\mu}{2}}{\frac{\mu_1-\mu}{2}} = \cos\mu$$

ist, erhält man so

$$\varkappa'' = \frac{(d+a)(a+d\cos\mu)}{(d+a\cos\mu)^2}. \tag{6}$$

11. Dieses lineare Vergrösserungsverhältniss ist unabhängig von der Lage des grössten Kreises AP und hängt nur von dem Werthe des Bogens $AP = \mu$ ab.

Für $\mu = 0$, d. h. für den Punkt A hat es den Werth 1.

Um zu sehen, wie $\varkappa''$ sich mit wachsenden Werthen von μ ändert, wollen wir den Werth von $\varkappa''$ für μ_1 mit $\varkappa''_1$ bezeichnen und die Differenz $\varkappa''_1 - \varkappa''$ bilden. Man erhält für dieselbe den Werth

$$\varkappa_1'' - \varkappa'' = (d + a)(\cos\mu - \cos\mu_1)$$
$$\times \frac{2a^2 d + a^3(\cos\mu_1 + \cos\mu) - d^3 + a^2 d \cos\mu\cos\mu_1}{(d + a\cos\mu)^2\,(d + a\cos\mu_1)^2}.$$

Diese Gleichung dividiren wir mit $\mu_1 - \mu$ und lassen nun die letztere Differenz in Null übergehen. Auf der rechten Seite tritt dann der Faktor

$$\frac{\cos\mu - \cos\mu_1}{\mu_1 - \mu} = 2\,\frac{\sin\frac{\mu_1 - \mu}{2}\sin\frac{\mu_1 + \mu}{2}}{\mu_1 - \mu}$$

auf, und hier geht

$$2\,\frac{\sin\frac{\mu_1 - \mu}{2}}{\mu_1 - \mu}$$

in 1 über, wenn man $\mu_1 - \mu = 0$ setzt. Man erhält so für $\mu_1 - \mu$, nachdem man noch rechts im Zähler und Nenner mit $d + a\cos\mu$ dividirt hat, die Gleichung

$$(7)\quad \frac{\varkappa_1'' - \varkappa''}{\mu_1 - \mu} = (d + a)\sin\mu\,\frac{2a^2 - d^2 + ad\cos\mu}{(d + a\cos\mu)^3},\ \mu_1 - \mu = 0.$$

Gesetzt nun, μ_1 ist grösser als μ und gleichzeitig auch $\varkappa_1''$ grösser als $\varkappa''$, so ist der Quotient

$$\frac{\varkappa_1'' - \varkappa''}{\mu_1 - \mu}$$

positiv; ist aber $\varkappa_1'' < \varkappa''$, während $\mu_1 > \mu$ ist, so ist dieser Quotient negativ. Diese Bemerkung bleibt richtig, wie klein wir uns auch die Differenz $\mu_1 - \mu$ denken mögen, sie gilt auch für den Grenzfall $\mu_1 - \mu = 0$. D. h. wenn der in (7) stehende Quotient positiv ist, so wächst $\varkappa''$ mit μ, wenn derselbe aber negativ ist, so nimmt $\varkappa''$ ab mit wachsendem μ.

Ob aber dieser Quotient positiv oder negativ ist, das hängt nur von dem Zähler $2a^2 - d^2 + ad\cos\varphi$ ab.

Wenn $d < a\sqrt{2}$ $(a \cdot 1{,}41421\ldots)$ ist, so wächst $\varkappa''$ mit wachsendem μ bis zu dem im zweiten Quadranten liegenden Werthe von μ, für welchen

$$\cos\mu = \frac{d^2 - 2a^2}{ad}$$

ist, erreicht hier seinen grössten Werth

$$\varkappa'' = \frac{d^2}{4a(d - a)},$$

um von da an abzunehmen.

Ist $d = a\sqrt{2} = a \cdot 1{,}41421\ldots$, so wächst $\varkappa''$ von $\mu = 0$ bis $\mu = 90^\circ$, erreicht hier den grössten Werth

$$\varkappa'' = \tfrac{1}{2}(\sqrt{2} + 1) = 1{,}20711\ldots$$

und nimmt dann ab.

Liegt d zwischen $a\sqrt{2}$ und $2a$, so wächst $\varkappa''$ von $\mu = 0$ bis zu dem im ersten Quadranten liegenden Werthe von μ, für welchen

$$\cos\mu = \frac{d^2 - 2a^2}{ad}$$

ist und nimmt von da an ab.

Ist $d = 2a$, so nimmt $\varkappa''$ von $\mu = 0$ an stetig ab, und dasselbe findet auch statt, wenn $d > 2a$ ist.

12. Wir wollen jetzt die Linearvergrösserung senkrecht zur Richtung AP' betrachten. Es seien P und Q zwei Nachbarpunkte eines auf AO senkrechten Kugelkreises, von welchem wir schon wissen, dass er sich in Form eines Kreises um A in der Projektion darstellt. Bedeuten dann P' und Q' die Projektionen von P und Q und wird der Bogen PQ in Bogenmaasse durch $\lambda_1 - \lambda$ ausgedrückt, so hat man

$$P'Q' = AP'(\lambda_1 - \lambda),\ PQ = a\sin\mu\,(\lambda_1 - \lambda)$$

und es ist also das Vergrösserungsverhältniss

$$\varkappa' = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{AP'}{a\sin\mu} = \frac{d+a}{d+a\cos\mu}, \tag{8}$$

ein Werth, der mit wachsendem μ auch fortwährend wächst.

13. Wenn man die Gleichungen (6) und (8) in der Form schreibt

$$P'P'_1 = \frac{(d+a)(a+d\cos\mu)}{(d+a\cos\mu)^2}\cdot PP_1 \text{ und}$$

$$P'Q' = \frac{d+a}{d+a\cos\mu}\cdot PQ,$$

so erhält man durch Division der letzteren durch die erstere

$$\frac{P'Q'}{P'P'_1} = \frac{d+a\cos\mu}{a+d\cos\mu}\cdot\frac{PQ}{PP_1}.$$

Nun drückt aber der Bruch links vom Gleichheitszeichen die trigonometrische Tangente des Winkels ψ' aus, den die Richtung P'_1Q' mit AP' einschliesst und rechts bedeutet

$$\frac{PQ}{PP_1}$$

die Tangente des Winkels ψ zwischen P_1Q und dem Bogen AP. Sonach hat man

$$\tan\psi' = \frac{d+a\cos\mu}{a+d\cos\mu}\cdot\tan\psi. \tag{9}$$

Diese Gleichung giebt uns die Aenderung eines Winkels in der Projektion an.

Wenn $d = a$ ist, also bei der stereographischen Projektion, so ergiebt sich $\tan\psi' = \tan\psi$, also auch $\psi' = \psi$, es findet demnach keine Aenderung der Winkel statt.

Für $d = 0$, bei der gnomonischen Projektion, ergiebt sich das schon bekannte Resultat

$$\tan\psi' = \cos\varphi\cdot\tan\psi$$

[vergl. §. 8, VI. Gl. (20)].

14. Bei der Gleichung (9) erhebt sich die Frage, für welchen Werth von ψ der Unterschied $\psi' - \psi$ seinen grössten Betrag erhält, mit andern Worten, wo die Aenderung der Winkel am bedeutendsten wird. Bezeichnet man nun den Quotienten

$$\frac{d + a \cos \mu}{a + d \cos \mu}$$

der Kürze halber mit k, so erhalten wir aus (9) die neue Gleichung

$$\tan (\psi' - \psi) = \frac{\tan \psi' - \tan \psi}{1 + \tan \psi' \tan \psi} = \frac{(k - 1) \tan \psi}{1 + k \tan^2 \psi}.$$

Setzt man $\tan \psi = y$, so kommt es jetzt auf die Ermittelung desjenigen Werthes von y an, für welchen der Ausdruck

$$z = \frac{y}{1 + ky^2}$$

seinen grössten Werth erreicht. Bezeichnet man aber in üblicher Weise mit z_1 den zu y_1 gehörigen Werth von z, so ergiebt sich

$$\frac{z_1 - z}{y_1 - y} = \frac{1 - ky_1 y}{(1 + ky^2)(1 + ky_1^2)},$$

welcher Ausdruch in

$$\frac{z_1 - z}{y_1 - y} = \frac{1 - ky^2}{(1 + ky^2)^2}$$

übergeht, wenn man $y_1 - y$ in Null übergehen lässt. Nun ist aber der rechts stehende Bruch positiv, mithin $z_1 > z$, z wächst also, so lange y von Null bis $y^2 = \frac{1}{k}$ wächst; für diesen Werth erreicht z seinen grössten Werth; für grössere Werthe von y tritt eine Abnahme von z ein, weil hier $1 - ky^2$ negativ wird. Es giebt sonach zwei Werthe von ψ, die sich aus der Gleichung

$$\tan^2 \psi = \frac{1}{k}$$

ergeben, für welche $\psi' - \psi$ seinen grössten Werth erreicht; die zugehörigen Werthe von ψ und ψ' folgen aus Gleichung (9). Diese Werthe von ψ und ψ' sind, wenn man für k seinen Werth einsetzt, durch die Gleichungen bestimmt

$$(10) \quad \tan \psi = \pm \sqrt{\frac{a + d \cos \mu}{d + a \cos \mu}}, \quad \tan \psi' = \pm \sqrt{\frac{d + a \cos \mu}{a + d \cos \mu}}.$$

Man sieht, dass die beiden Werthe von ψ sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, dass also der Winkel der beiden Richtungen, für welche $\psi' - \psi$ am grössten ist, von dem grössten Kreise AP halbirt wird. In gleicher Weise wird der Winkel der Projektionen dieser beiden Richtungen von der Geraden AP' halbirt.

Um diese beiden Richtungen auf der Karte zu konstruiren trage man auf der Verlängerung von AP' die Strecke $P'K = a + d \cos \mu$ und nach gleicher Richtung die Strecke $KL = d + a \cos \mu$

Fig. 44.



ab, schlage über $P'L$ als Durchmesser einen Kreis und errichte in K auf AK eine Senkrechte, welche den Kreis in F und F' schneidet. Dann sind $P'F$ und $P'F'$ die beiden Richtungen. Denn, wenn $\angle KP'F = \angle KFL = \omega'$ gesetzt wird, so ist

$$KF = P'K \tan\omega' \text{ und } KL = KF \cdot \tan\omega' = P'K \cdot \tan^2\omega',$$

mithin

$$(11)\qquad \tan\omega' = \sqrt{\frac{KL}{P'K}} = \sqrt{\frac{d + a\cos\mu}{a + d\cos\mu}}.$$

15. Wir sehen aus diesen Untersuchungen, dass die Winkel in der Projektion im Allgemeinen von denen auf der Kugeloberfläche verschieden sind. Es lässt sich aber zeigen, dass es zu jeder durch einen Punkt P gehenden Richtung ψ eine bestimmte, ihr konjugirte Richtung υ giebt, welche die Eigenschaft besitzt, dass der Richtungsunterschied $\psi - \upsilon$ in der Projektion nicht geändert wird.

Gesetzt ψ und υ sind die Winkel, welche zwei Linienelemente auf der Kugel mit dem grössten Kreise AP bilden, ψ' und υ' sind die Winkel, welche die Projektionen dieser Linienelemente mit AP' bilden, so soll die Gleichung

$$\psi - \upsilon = \psi' - \upsilon'$$

oder

$$\psi - \psi' = \upsilon - \upsilon'$$

bestehen, statt deren man auch

$$(12)\qquad \frac{\tan\psi - \tan\psi'}{1 + \tan\psi\tan\psi'} = \frac{\tan\upsilon - \tan\upsilon'}{1 + \tan\upsilon\tan\upsilon'}$$

schreiben kann. Setzt man dann statt der Gleichung (9) abkürzungsweise

$$\tan\psi' = k\tan\psi,$$

so ist analog

$$\tan\upsilon' = k\tan\upsilon,$$

und wenn man diese Werthe in (12) einsetzt und beiderseits mit $1 - k$ dividirt, so erhält man

$$\frac{\tan\psi}{1 + k\tan^2\psi} = \frac{\tan\upsilon}{1 + k\tan^2\upsilon}.$$

Bringt man in dieser Gleichung die Nenner weg, so kann man ihr die Form geben

$$\frac{\tan\psi - \tan\upsilon}{k} = (\tan\psi - \tan\upsilon)\tan\psi\tan\upsilon,$$

und wenn man den Faktor $\tan\psi - \tan\upsilon$ beiderseits streicht, so ergiebt sich

$$(13)\qquad \tan\psi\tan\upsilon = \frac{1}{k} = \frac{a + d\cos\mu}{d + a\cos\mu},$$

welche Gleichung die Richtigkeit unserer obigen Behauptung bestätigt. Statt (13) kann man zufolge (9) auch schreiben

$$\tan \psi' \tan \upsilon' = k = \frac{d + a \cos \mu}{a + d \cos \mu}. \tag{14}$$

Aus diesen Relationen erhellt, dass jede der Richtungen, in denen die Winkeländerung ihren grössten Werth erreicht [Formel (10)], sich selbt konjugirt ist.

Mit Berücksichtigung der Gleichung (11) kann man der vorigen Formel auch die Gestalt geben

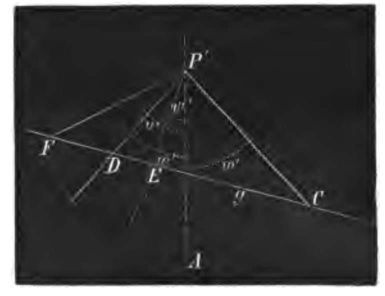
$$\tan \psi' \tan \upsilon' = \tan^2 \omega',$$

und an deren Stelle kann man, wie eine einfache goniometrische Rechnung lehrt, schreiben

$$\frac{\sin (\omega' + \psi')}{\sin (\omega' - \psi')} = \frac{\sin (\upsilon' + \omega')}{\sin (\upsilon' - \omega')}.$$

Ist nun in Fig. 45 AP' die Verbindungslinie des Punktes P' mit dem Mittelpunkte A der Karte, sind ferner $P'C$ und $P'D$ die zwei Richtungen, in denen die Winkeländerung $\psi' - \psi$ ihren grössten Werth erreicht, also Winkel $CP'A$ = Winkel $AP'D = \omega'$, sind endlich $P'E$ und $P'F$ irgend ein Paar konjugirte Richtungen und bezeichnen wir dabei mit C, D, E und F die vier Punkte, in denen die vier zuletzt genannten Richtungen eine beliebige Gerade schneiden, so kann man (analog S. 20) statt der letzten Gleichung oben auch setzen

Fig. 45.



$$\frac{\triangle CP'E}{\triangle EP'D} = \frac{\triangle CP'F}{\triangle DP'F}.$$

und da alle diese Dreiecke die Spitze P' gemein haben, so kann man dafür wieder

$$\frac{CE}{ED} = \frac{CF}{DF} \text{ oder } \frac{EC}{CF} = -\frac{ED}{DF}$$

setzen. D. h. die zwischen zwei konjugirten Richtungen liegende Strecke EF einer beliebigen Geraden g wird von den beiden Richtungen grösster Winkeländerung in C und D harmonisch getheilt.

Geht die beliebige Gerade g parallel zu einer der beiden Richtungen grösster Winkeländerung, z. B. zu $P'C$, so fällt der betreffende Schnittpunkt C in unendliche Ferne; es ist dann

$$\frac{EC}{CF} = -1,$$

mithin $ED = DF$, d. h. die zwischen zwei konjugirten Richtungen liegende Strecke einer Geraden, welche zu der einen Richtung grösster Winkeländerung parallel geht, wird von der andern dieser Richtungen halbirt.

Wie man mit Benutzung dieser Eigenschaft zu einer gegebenen Richtung auf der Karte die ihr konjugirte konstruiren kann, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung.

16. Wir wenden uns schliesslich noch zur Besprechung der Linearveränderung in einer beliebigen Richtung. Es sei PQ ein Linienelement, welches mit AP den Winkel ψ einschliesst, QP_1 sei von Q aus senkrecht auf AP gefällt; dann ist

$$PQ = PP_1 \sec \psi.$$

Sind dann P', Q', P'_1 die Projektionen von P, Q, P_1, so hat man entsprechend

$$P'Q' = P'P'_1 \sec \psi$$

und sonach ist die Linearveränderung

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \varkappa = \frac{P'P'_1}{PP_1} \cdot \frac{\sec \psi'}{\sec \psi}.$$

Mit Berücksichtigung von Nr. 10 geht diese Formel über in

$$\varkappa = \varkappa'' \frac{\sec \psi'}{\sec \psi}. \tag{15}$$

Es ist nun

$$\frac{\sec \psi'}{\sec \psi} = \sqrt{\frac{1 + k^2 \tan^2 \psi}{1 + \tan^2 \psi}} = \sqrt{1 + (k^2 - 1) \sin^2 \psi}, \tag{16}$$

wo k wieder zur Abkürzung für

$$\frac{d + a \cos \mu}{a + d \cos \mu}$$

geschrieben ist. Da aber $\sin^2 \psi$ zwischen 0 und 1 liegt, so liegt der Bruch in Gleichung (16) zwischen den beiden Grenzen

$$\text{für } \psi = 0 \quad \ldots\ldots \quad \sqrt{1} = 1$$
$$\text{,, } \psi = 90^\circ \quad \ldots\ldots \quad \sqrt{1 + (k^2 - 1)} = k$$

und sonach sind die extremen Werthe von $\varkappa$

$$\text{für } \psi = 0 \quad \ldots\ldots \quad \varkappa = \varkappa''$$
$$\text{,, } \psi = 90^\circ \quad \ldots\ldots \quad \varkappa = \varkappa'' k = \varkappa'.$$

In den beiden Richtungen AP und senkrecht darauf ist also die Linearveränderung am grössten und am kleinsten, und zwar tritt das Maximum in AP oder in der senkrechten Richtung ein, je nachdem k kleiner oder grösser als die Einheit ist.

17. Endlich haben wir noch die Flächenvergrösserung zu besprechen. Nehmen wir eine Kugelzone von der verschwindend kleinen Breite PP_1 in der Entfernung $AP = \mu$ von A an, so ist deren Fläche

$$2\, a \sin \mu \cdot \pi \cdot PP_1$$

und die Fläche ihrer Projektion ist

$$2\, AP' \cdot \pi \cdot P'P'_1.$$

Sonach hat man für die Flächenvergrösserung den Ausdruck

$$\nu = \frac{P'P'_1}{PP_1} \cdot \frac{AP'}{a \sin \mu} = \varkappa'' \varkappa',$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (6) und (8)

$$(17) \qquad v = \frac{(d+a)^2\,(a+d\cos\mu)}{(d+a\cos\mu)^3}.$$

Nennt man weiter v_1 den zu μ_1 gehörigen Werth, berechnet $v_1 - v$ und dividirt mit $\mu_1 - \mu$, setzt dann $\mu_1 - \mu = 0$, so erhält man schliesslich

$$\frac{v_1 - v}{\mu_1 - \mu} = \frac{(d+a)^2\sin\mu}{(d+a\cos\mu)^3}(2ad\cos\mu - d^2 + 3a^2).$$

Man sieht hieraus, dass v wächst, so lange

$$\cos\mu > \frac{d^2 - 3a^2}{2ad}$$

ist, dass für

$$\cos\mu = \frac{d^2 - 3a^2}{2ad}$$

der Maximalwerth von v, nämlich

$$(18) \qquad v = \frac{4d^3}{27a(d-a)^2}$$

erreicht wird, und dass von da an eine Abnahme des Werthes von v stattfindet.

Wenn $d = a\sqrt{3} = a \cdot 1{,}7320\ldots$ ist, so tritt der Maximalwerth für $\mu = 90^0$ ein; die Flächenvergrösserung wächst dann während des ganzen ersten Quadranten von $v = 1$ bis $v = 1{,}0516$.

VII. Die Wahl des Projektionscentrums O.

18. Wir haben schon gesehen, wie wesentlich die Eigenschaften der Projektion abhängig sind von der Wahl des Projektionscentrums O. Ausser den beiden Annahmen, dass O im Centrum liegt (gnomonische Projektion) oder dass es auf der Kugeloberfläche selbst liegt (stereographische Projektion), sind besonders die folgenden noch erwähnenswerth.

Der französische Mathematiker De la Hire*) (1640 — 1718) hat den Vorschlag gemacht, den Punkt O so zu wählen, dass der Halbirungspunkt C eines Bogens AB von 90^0 sich als Halbirungspunkt der Projektion AB' des letzteren darstellt. Da nun allgemein

$$AP' = \frac{a\,(d+a)\sin\mu}{d+a\cos\mu},$$

ist, so ergiebt sich für $\mu = 90^0$

$$AB' = \frac{a\,(d+a)}{d}$$

und für $\mu = 45^0$ wegen $\cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$AC' = \frac{a\,(d+a)\sqrt{2}}{2\,d + a\sqrt{2}}.$$

---

*) *Histoire de l'Académie des sc., année MDCCI avec les mém. des math. et phys. Paris 1704. Construction d'un nouvel astrolabe, 3 déc. 1701.*

Setzt man nun $AB' = 2AC'$, so giebt dies für d den Werth

(19) $$d = a\left(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = a \cdot 1{,}70711\ldots$$

Auf Taf. II in Fig. VII ist der Punkt O auf diese Weise gewählt. Um ihn durch Konstruktion zu erhalten, ist der Halbmesser MB senkrecht zu AM gezogen und in D halbirt worden; die Verbindungslinie des Punktes M mit dem Halbirungspunkte C des Viertelkreises AB bestimmt dann auf der Verlängerung von AM den Punkt O.

Aus der in genannter Figur dargestellten Aequatorial-Projektion ist schon ersichtlich, dass parallele Kugelkreise, welche A als Pol und gleich grosse sphärische Abstände besitzen, sich in der Projektion als um A koncentrische Kreise mit nahezu gleichen Abständen darstellen. Auch ergiebt sich mit Benutzung der Untersuchungen in Nr. 10 und 11 dieses Paragraphen, dass das Vergrösserungsverhältniss $\varkappa''$ von dem Werthe $\varkappa'' = 1$, den es für $\mu = 0$ besitzt zunimmt bis

$$\cos\mu = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 2}$$

ist, d. h. bis $\varphi = 57^0\ 42'$, wo es den Maximalwerth

$$\varkappa'' = \frac{d^2}{4a\,(d - a)} = 1{,}03033$$

erreicht; bei $\varphi = 90^0$ ist $\varkappa'' = 0{,}929$. Die La Hire'sche Projektion hat also den Vorzug, dass in der Richtung vom Mittelpunkte der Karte aus nach dem Umfange die lineare Vergrösserung immer nahezu denselben Werth behält; bei der Meridianprojektion wird also der erste Meridian durch die Parallelkreise, der Aequator durch die Meridiane in nahezu gleiche Theile getheilt,

19. Bald nachdem De la Hire seine Projektiosmethode der französischen Akademie vorgetragen hatte, versuchte sein Zeitgenosse und Landsmann Parent (1666 — 1716) die Bestimmung des Projektionscentrums in anderer Weise.*) Der Gedanke, der ihn dabei leitete, war im wesentlichen folgender:

Wenn d zwischen $a\sqrt{2}$ und $2a$ liegt, so nimmt, während μ von 0^0 bis 90^0 wächst, das Vergrösserungsverhältniss $\varkappa''$ anfangs zu und dann wieder ab. Die Summe der absoluten Werthe dieser Aenderungen von $\varkappa''$, d. h. der doppelte Maximalwerth weniger der Summe des ersten und letzten Werthes von $\varkappa''$ (für $\mu = 0^0$ und $\mu = 90^0$) kann man als die Gesammtänderung von $\varkappa''$ bezeichnen und nun O so zu bestimmen versuchen, dass der Werth dieser Gesammtänderung möglichst klein wird.

Versuchen wir nun den angegebenen Gedanken auszuführen, so haben wir zunächst den Maximalwerth

$$\frac{d^2}{4a\,(d - a)}$$

*) *Histoire de l'Acad. des sciences, année MDCCII. Paris 1704. — Essais et Recherches de mathématiques et physique de Parent. Paris 1713. II. Vol.*

und für $\mu = 0$ den Werth $\varkappa'' = 1$, für $\mu = 90^0$ aber den Werth

$$\varkappa'' = \frac{(d+a)\,a}{d^2};$$

die anfängliche Zunahme von $\varkappa''$ ist

$$\frac{d^2}{4a\,(d-a)} - 1,$$

die dann eintretende Abnahme

$$\frac{d^2}{4a\,(d-a)} - \frac{(d+a)\,a}{d^2}$$

und also die Gesammtänderung

$$(20) \quad \frac{d^2}{2a\,(d-a)} - \frac{(d+a)\,a}{d^2} - 1.$$

Da aber Parent die Zeichenebene durch den Mittelpunkt der Kugel, also in die Entfernung d vom Punkte O legt, während sie bei uns in der Entfernung $d + a$ liegt, so erhält man den Parent'schen Werth der Gesammtänderung, welcher ω heissen möge, indem man den vorstehenden mit d multiplicirt und mit $d + a$ dividirt. Es ist demnach

$$\omega = \frac{d^3}{2a\,(d^2 - a^2)} - \frac{a}{d} - \frac{d}{d+a}.$$

Um bequemer rechnen zu können, setzen wir $d = az$ und erhalten dann

$$\omega = \frac{z^3}{2\,(z^2 - 1)} - \frac{1}{z} - \frac{z}{z+1}.$$

Bilden wir uns den entsprechenden Ausdruck ω_1 für z_1, ziehen dann ω von ω_1 ab und dividiren $\omega_1 - \omega$ mit $z_1 - z$, setzen endlich noch $z_1 - z = 0$, so kommen wir zu der Formel

$$\frac{\omega_1 - \omega}{z_1 - z} = \frac{z^6 - 3\,z^4 + 4\,z^3 - 6\,z^2 + 2}{2\,(z^2 - 1)^2\,z^2}.$$

Setzt man in dem Zähler der rechten Seite dieser Gleichung,

$$(21) \qquad z^6 - 3\,z^4 + 4\,z^3 - 6\,z^2 + 2 = Z,$$

für z den Werth 1,5 ein, so ergiebt sich

$$Z = -\,1{,}797,$$

und das negative Zeichen dieses Werthes sagt uns, dass für $z_1 > z$ umgekehrt $\omega_1 < \omega$ ist, d. h., dass mit wachsendem z die Grösse ω abnimmt.

Setzt man dagegen $z = 1{,}6$, so ergiebt sich

$$Z = +\,0{,}141,$$

und man erkennt an dem Plus-Zeichen, dass ω hier im Wachsen begriffen ist. Zwischen $z = 1{,}5$ und $z = 1{,}6$ muss es also einen Werth von z geben, für welchen das bisherige Abnehmen von ω in ein Zunehmen übergeht, dem also der kleinste Werth von ω entspricht; und wir erhalten diesen Werth, wenn wir $Z = 0$ setzen.

Da für $z = 1{,}59$ der Werth von $Z = -0{,}105$ negativ ist, so ist hier ω noch im Abnehmen begriffen und der gesuchte Werth liegt also zwischen $z = 1{,}59$ und $z = 1{,}6$. Für $z = 1{,}594$ erhält man $Z = +0.001$ und man kann also 1,594 als den gesuchten Werth von z betrachten. Sonach ist

$$d = a \cdot 1{,}594.$$

Parent nimmt statt dessen $z = 1{,}595$ an, wofür $Z = 0{,}0157$ ist; man kann dies als hinlänglich genau für die Praxis betrachten.

Das ganze Verfahren Parent's hat indessen etwas Willkürliches, insofern der gesuchte Werth von d abhängig ist von der Wahl der Projektionsebene. Nehmen wir dieselbe so, wie gewöhnlich in diesem Werke, nämlich als Tangentialebene der Kugel an, so müssen wir für ω den mit (20) bezeichneten Werth nehmen, und wenn wir denselben auf die oben beschriebene Weise behandeln, so haben wir schliesslich den Werth von z, welcher dem Minimum von ω entspricht, aus der Gleichung

$$(22) \qquad z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 6z + 4 = 0$$

zu ermitteln. Nun ergiebt sich aber für $z = 1{,}604$ der Werth der linken Seite dieser Gleichung gleich $+ 0{,}008$; man kann daher

$$d = a \cdot 1{,}604$$

als denjenigen Werth ansehen, der den Ausdruck (20) zu einem Minimum macht. Das Maximum, welches $\varkappa''$ erreicht, ist

$$\varkappa'' = 1{,}0607,$$

der zu $\mu = 90^0$ gehörige Werth dagegen $\varkappa'' = 1{,}0125$.

20. Man könnte auch versuchen O so zu bestimmen, dass die beiden äussersten Werthe von $\varkappa''$, nämlich

$$\text{für } \mu = 0 \quad \ldots \quad \varkappa'' = 1$$

$$\text{und für } \mu = 90^0 \quad \ldots \quad \varkappa'' = \frac{(d+a)\,a}{d^2}$$

gleich gross werden; man erhält dann

$$d = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}) = a \cdot 1{,}618.$$

Das zugehörige Maximum von $\varkappa''$ ist

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\sqrt{5} = 1{,}059.$$

Dass bei der Annahme $d = a\sqrt{2}$ die Werthe von $\varkappa''$ von $\mu = 0$ bis $\mu = 90^0$ stetig zunehmen, bei der Annahme $d = 2a$ aber stetig abnehmen, ist schon oben erwähnt worden.

Parent hat ausserdem noch d so zu wählen versucht, dass der Maximalwerth von $\varkappa''$ möglichst klein ausfällt. Diese Bestimmung ist aber wieder von der Lage der Projektionsebene abhängig. Nimmt man dieselbe so an, wie wir es gewöhnlich thun, so wird erwähnter Werth

$$\varkappa'' = \frac{d^2}{4a(d-a)}$$

und wenn man kleinere Werthe von d als a ausschliesst, so findet

man, dass $\varkappa''$ am kleinsten, nämlich $= 1$ wird für $d = 2a$. Geht aber, wie Parent annimmt, die Zeichenebene durch den Kugelmittelpunkt, so ist

$$\varkappa'' = \frac{d^3}{4a\,(d^2 - a^2)}$$

und der Minimalwerth für diesen Ausdruck liegt bei

$$d = a\sqrt{3} = a \cdot 1{,}7320\ldots,$$

wie man leicht findet, wenn man den zu d_1 gehörigen Werth $\varkappa_1''$ berechnet, dann die Differenz $\varkappa_1'' - \varkappa''$ ermittelt, sie mit $d_1 - d$ dividirt und den Werth des erhaltenen Quotienten $= 0$ setzt.

Noch ein anderes Verfahren zur Bestimmung von O wurde im Jahre 1825 von John Lowry in London vorgeschlagen. Er projicirte den von A ausgehenden Kreisquadranten auf eine durch den Mittelpunkt M der Kugel gehende Ebene, so dass die Projektion ein Halbmesser wurde. Dann bestimmte er für jeden der Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots$, welche den Bögen $AP_1 = 5^0$, $AP_2 = 10^0$, $AP_3 = 15^0, \ldots$ entsprechen, ein Projektionscentrum, so dass die Projektionen von $P_1, P_2, P_3, \ldots$ den Halbmesser in 18 gleiche Theile theilten. Aus den so ermittelten 17 verschiedenen Werthen von $MO = d$ nahm er dann das arithmetische Mittel und erhielt so $d = 1{,}69$. Dieser Werth stimmt so genau mit dem von De la Hire angegebenen überein, dass man beide füglich mit einander vertauschen kann; nur bei grossem Massstabe der Karte weichen beide Projektionen merkbar von einander ab.

20. Die bisher besprochenen Methoden zur Bestimmung des Punktes O berücksichtigen nur die Linearveränderung; man kann aber auch die Flächenvergrösserung in Betracht ziehen. Dies hat schon Parent gethan, und zwar hat derselbe die Flächenvergrösserung in ganz gleicher Weise behandelt, wie die Linearvergrösserung. Ist nämlich $d > a\sqrt{3}$, so wächst ν von dem Werthe ν_0, welcher $\mu = 0$ entspricht, bis zum Maximalwerthe ν_1 und nimmt dann ab bis zum Werthe ν_2, welcher $\mu = 90^0$ entspricht. Die Gesammtänderung des ν im ersten Quadranten ist also

$$\omega = \nu_1 - \nu_0 + \nu_1 - \nu_2 = 2\nu_1 - (\nu_0 + \nu_2).$$

Parent wählt nun d so, dass diese Gesammtänderung ihren kleinsten Werth erreicht.

Setzen wir für ν_0, ν_1, ν_2 die Werthe, welche sich aus den Formeln der Nr. 17 ergeben, so erhalten wir für ω den Ausdruck

$$(23)\qquad \frac{8}{27} \cdot \frac{d^3}{a\,(d-a)^2} - 1 - \frac{(d+a)^2\,a}{d^3}.$$

Da aber Parent seine Projektionsebene durch den Mittelpunkt der Kugel legt, so muss man, um zu den Parent'schen Formeln zu gelangen, vorstehenden Ausdruck mit d^2 multipliciren und mit $(d+a)^2$ dividiren. Auf diese Weise ergiebt sich

$$\omega = \frac{8}{27} \cdot \frac{d^5}{a\,(d^2 - a^2)^2} - \frac{d^2}{(d+a)^2} - \frac{a}{d},$$

oder, wenn man $d = az$ setzt

$$(24) \qquad \omega = \frac{8}{27} \cdot \frac{z^5}{(z^2-1)^2} - \frac{z^2}{(z+1)^2} - \frac{1}{z}.$$

Bezeichnet man mit ω_1 denjenigen Werth, welcher z_1 entspricht, so ergiebt sich in bekannter Weise für $z_1 - z = 0$

$$\frac{\omega_1 - \omega}{z_1 - z} = \frac{8z^8 - 121z^6 + 162z^5 - 81z^4 + 54z^3 - 81z^2 + 27}{27z^2(z^2-1)^3}.$$

Für $z = 2$ hat der Zähler

$$(25) \qquad 8z^8 - 121z^6 + 162z^5 - 81z^4 + 54z^3 - 81z^2 + 27$$

den Werth $- 1677$, ω ist also hier noch im Abnehmen begriffen. Bestimmt man nun durch Probiren den Werth von z, welcher die Formel (25) auf Null bringt, so findet man

$$z = 2{,}105 \ldots \text{ oder } d = 2{,}105 \ldots a.$$

Dieser Werth entspricht also der kleinsten Gesammtänderung der Fläche in dem oben angegebenen Sinne.

Es gilt auch von dieser Bestimmung des Werthes von d dieselbe Bemerkung, die schon oben am Schlusse der Nr. 19 rücksichtlich des Parent'schen Verfahrens zur Bestimmung von d mittelst der Gesammtänderung der Längenvergrösserung gemacht wurde; sie ist abhängig von der Lage der Zeichenebene. Benutzt man zur Bestimmung von d den Ausdruck (23), wie es der in diesem Buche gebräuchlichen Annahme der Bildebene entspricht, so hat man den Werth von z aus der Gleichung

$$8z^7 - 24z^6 + 27z^5 + 27z^4 - 162z^3 + 64z^2 + 135z - 81 = 0$$

zu ermitteln und erhält dann

$$z = 2{,}154 \text{ oder } d = 2{,}154 \ldots a,$$

was nicht unerheblich von dem Parent'schen Werthe abweicht.

21. Wir müssen noch der perspektivischen Projektion von ungefähr ¾ der Kugeloberfläche gedenken, welche der Oberst Henry James, Chef des Britischen Vermessungswesens, im Jahre 1857 angegeben hat.*) In einem an den Präsidenten der geographischen Gesellschaft in London gerichteten Schreiben vom 6. März genannten Jahres spricht er sich selbst über diese Entwurfsart folgendermaassen aus:

„Indem ich die von Sir John Herschel in seinen Umrissen der Astronomie und von Sir Charles Lyell in dessen Grundzügen der Geologie aufgestellte interessante Thatsache, dass der Centralpunkt der Halbkugel, welche die grösste Masse Landes umfasst, nahezu auf London oder genauer auf Falmouth, unsern westlichsten Ausgangshafen für den Verkehr mit allen Theilen der bewohnbaren Erde falle, auf einem Globus prüfte, kam mir der Gedanke, zu untersuchen, wohin der Centralpunkt des Theiles der Erde, welcher das ganze Kontinent von Asien, Europa, Afrika und Amerika umfasst, fallen würde, und fand denselben im Wendekreise des Krebses

*) *Proceedings of the Royal Geogr. Soc. of London. 1857. Vol. I. pag 421.*

(23° 30′ n. Br.) und unter 15° ö. L. von Greenwich, in der Nähe von Rhat (Ghat) in Afrika, etwa 700 Meilen von Tripoli.

„Der Theil der Erdfläche, welcher von diesem Mittelpunkt aus die vier genannten Hauptgebiete der Erde umspannt, bildet sehr nahezu zwei Drittheile der Erdoberfläche, und ich fand, dass beim Entwurf dieses Theiles der Sphäre auf eine Ebene, welche dem grössten Kreise, dessen Pol der genannte Mittelpunkt bildet, parallel ist, und von einem in der Verlängerung der Achse dieses grössten Kreises um die Hälfte des Radius der Kugel entfernten Punkte aus in der That das ganze Kontinent der vier Welttheile in einer genau geometrischen Projektion dargestellt werden könne.

„Wie ich glaube werden hiermit zum ersten Male zwei Drittheile der Kugel auf Einen Blick dem Auge dargeboten. Wie in allen andern Projektionen eines beträchtlichen Theiles der Kugel in einer Ebene, findet sich auch hier ein gewisser Grad von Verzerrung nach dem Rande zu; allein die Beziehung auf die Meridiane und Parallelen beugt etwaigen Missverständnissen über die wirkliche gegenseitige Lage aller Punkte hinlänglich vor, und man wird finden, dass die mittleren Theile der Karte, welche die Arktischen Regionen, Europa und Afrika umfassen, auffallend wenig verzerrt erscheinen."

Auf **Taf. II** zeigt uns **Fig. VIII** die rechte Hälfte eines solchen Kartennetzes. Die Entfernung $MO = d$ ist gleich 1,5 a und die Breite des Punktes A oder $\alpha = 23\frac{1}{2}°$; die Darstellung reicht bis zum Südpol, also bis 113° 30′ Entfernung von A.

In ganz ähnlicher Weise, wie die stereographische Abbildung **Fig. VI**, zeigt uns unsere Figur die Projektion der einzelnen auf dem Mittelmeridian liegenden Punkte der verschiedenen Parallelkreise.

Diese Entwurfsart ist für physikalische Erdbilder, welche möglichst grosse Landmassen auf einen Blick zeigen sollen, ohne dass dabei die Verzerrung nach dem Rande hin sich in störender Weise geltend macht, namentlich auch für geologische Darstellungen, sehr brauchbar. Auch für Sternkarten dürfte sie sich sehr gut eignen, da sie die Parallelkreise um den Nordpol bis zu $47\frac{1}{2}°$ Breite vollständig zeigt.

Da die Entwurfsart von James vom Centrum aus nach allen Richtungen hin 113° 30′ umfasst, so beträgt die abgebildete Fläche

$$2r^2\pi + 2r^2\pi \sin 23\tfrac{1}{2}° = 2r^2\pi \cdot 1{,}3987,$$

oder 0,6993 der ganzen Erdoberfläche, was über $\frac{2}{3}$, fast $\frac{7}{10}$ ist.

Das Maximum der Linearvergrösserung in radialer Richtung findet für $\mu = 80° \; 24'$ statt und beträgt 1,125, die Vergrösserung in der Mitte $= 1$ gesetzt; am Rande ist diese Vergrösserung nur 0,826.

Die Flächenvergrösserung erreicht ihren Maximalwerth $\nu = 2$ für $\mu = 104° \; 29'$; am Rande beträgt sie 1,876.

22. Später hat der Kapitän A. R. Clarke*) noch eine andere

*) *On projections for maps applying to a very large extent of the Earth's surface by Col. H. James and Cap. A. R. Clarke. Philos. Magaz. April 1862, p. 306.*

Bestimmung von d gegeben, die zu dem Resultate $d = 1{,}36763\,a$ oder ungefähr $1\frac{11}{30}\,a$ führt. Da die Entwickelung des Gedankenganges, der dieses Ergebniss liefert, sich ohne grosse Weitläufigkeit nicht mit den Methoden der elementaren Mathematik ausführen lässt, so werden wir hier ohne Weiteres von den Hilfsmitteln der Differential- und Integralrechnung Gebrauch machen.

Es sei P ein Punkt der Kugel, deren Halbmesser wir $= 1$ setzen, AP sei $= \mu$; ein verschwindend kleiner Zuwachs von AP wird dann mit $\mu_1 - \mu$ oder kürzer $d\mu$ bezeichnet.

Ferner sei $AP' = r$, die Projektion des Zuwachses von AP ist dann $r_1 - r$ oder kürzer dr.

Die Vergrösserung des ursprünglichen Längenelementes $d\varphi$ ist daher $dr - d\mu$ und das Verhältniss dieser Vergrösserung zur ursprünglichen Länge ist

$$\frac{dr}{d\mu} - 1.$$

Ferner ist $\sin\mu \cdot (\lambda_1 - \lambda)$ oder $\sin\mu \cdot d\lambda$ die Länge eines Linienelementes der Kugel, welches durch P, senkrecht zu AP geht; $rd\lambda$ ist seine Abbildung.

Dasselbe ist also vergrössert um $rd\lambda - \sin\mu d\lambda$, und diese Vergrösserung steht zum ursprünglichen Werthe in dem Verhältnisse

$$\frac{rd\lambda - \sin\mu d\lambda}{\sin\mu d\lambda} = \frac{r}{\sin\mu} - 1.$$

Nach einem von Airy angegebenen, allerdings von Willkür nicht ganz freien Principe, das wir später bei Gelegenheit der sogenannten *Projection by Balance of Errors* näher kennen lernen werden, kann man nun die Summe der Quadrate

$$\left(\frac{dr}{d\mu} - 1\right)^2 + \left(\frac{r}{\sin\mu} - 1\right)^2,$$

noch multiplicirt mit der Grösse $\sin\mu\, d\mu\, d\lambda$ des Flächenelementes auf der Kugel, also die Grösse

$$\left[\left(\frac{dr}{d\mu} - 1\right)^2 + \left(\frac{r}{\sin\mu} - 1\right)^2\right] \sin\mu\, d\mu\, d\lambda,$$

als Maassstab für die Gesammtänderung dieses Flächenelementes betrachten. Wenn man daher alle entsprechenden Werthe für die verschiedenen Flächenelemente des zur Darstellung kommenden Theiles der Kugelfläche bildet und addirt, oder mit anderen Worten, wenn man den vorstehenden Ausdruck für das angegebene Gebiet integrirt, so erhält man das Maass für die Gesammtänderung, welche durch die Karte bewirkt wird.

Für λ werden die Integrationsgrenzen 0 und 2π und die Integration giebt ganz einfach den Faktor 2π. Da derselbe konstant ist, so wollen wir ihn weglassen, und wenn wir nun als obere Integrationsgrenze von μ den Werth β annehmen, so haben wir für die Gesammtänderung den Ausdruck

$$\int_0^\beta \left[\left(\frac{dr}{d\mu} - 1\right)^2 + \left(\frac{r}{\sin\mu} - 1\right)^2\right] \sin\mu \, d\mu = M. \tag{26}$$

Nach Airy hat man nun für r einen solchen Werth zu wählen, dass M seinen Minimalwerth erreicht.

Setzt man nun

$$r = \frac{d' \sin\mu}{d + \cos\mu}, \tag{27}$$

wo $d = MO$, $d' = AO$ (nach früherer Bezeichnung) ist, so dass also die Lage der Bildebene vorläufig noch unbestimmt bleibt, so tritt an die Stelle der Gleichung (26) die folgende

$$\int_0^\beta \left[\left(\frac{d'(d\cos\mu + 1)}{(d+\cos\mu)^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{d'}{d+\cos\mu} - 1\right)^2\right] \sin\mu \, d\mu = M,$$

wo zu beachten ist, dass innerhalb der Klammer, sowie in (27) der Buchstabe d eine Quantität bedeutet, während er oben und in dem Faktor $\sin\mu \, d\mu$ der letzten Formel nur das Differential ausdrückt. Die Ausführung der Integration giebt

$$M = d'^2 \cdot \Delta_1 + 2d' \cdot \Delta_2 + 4 \sin^2 \frac{\beta}{2}, \tag{28}$$

wo abkürzungsweise gesetzt worden ist

$$\Delta_1 = \frac{1 + d^2}{N} - \frac{d\,(d^2 - 1)}{N^2} + \frac{(d^2-1)^2}{3N^3} - \frac{1}{3}\,\frac{(1-d)^2}{1+d} - 1,$$

$$\Delta_2 = (1 + d)\; l\, \frac{N}{1+d} + \frac{d^2 - 1}{N} - d + 1,$$

$$N = d + \cos\beta.$$

Soll nun M ein Minimum werden, so muss der Differentialquotient von M, genommen nach d', sowie auch der nach d, jeder den Werth Null haben. Die erstere Differentiation giebt aber

$$d' \cdot \Delta_1 + \Delta_2 = 0 \text{ oder } d' = -\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \tag{29}$$

und wenn man diesen Werth von d' in die Formel (28) einsetzt, so ergiebt sich

$$M = 4 \sin^2 \frac{\beta}{2} - \frac{\Delta_2^2}{\Delta_1}.$$

Statt die Gleichung zu entwickeln und aufzulösen, auf welche man durch Differentiation des M nach d gelangt, ist es bequemer Δ_2 und Δ_1 für verschiedene Werthe von d zu berechnen und so durch ein geregeltes Probiren denjenigen Werth zu ermitteln, für welchen

$$\frac{\Delta_2^2}{\Delta_1}$$

seinen grössten, also M seinen kleinsten Werth annimmt. Clarke hat auf diese Weise für $\beta = 113^0\ 30'$

$$d = 1{,}36763 \text{ und } d' = 1{,}66261$$

gefunden, so dass also r den Werth hat

(30) $$r = \frac{1,66261 \sin \mu}{1,36763 + \cos \mu}.$$

Die folgende, von Clarke berechnete Tabelle giebt die Werthe von r für verschiedene Werthe von μ von 5 zu 5 Grad.

μ	r	μ	r
0°	0,0000	60°	0,7710
5	0,0613	65	0,8417
10	0,1227	70	0,9138
15	0,1844	75	0,9874
20	0,2464	80	1,0623
25	0,3090	85	1,1385
30	0,3722	90	1,2157
35	0,4361	95	1,2935
40	0,5009	100	1,3713
45	0,5666	105	1,4484
50	0,6335	110	1,5233
55	0,7016	115	1,5945

Für $\mu = 113^\circ\ 30'$ ist $r = 1,5737$.

Karten dieser Art besitzen dieselben Vorzüge, wie die von James, nur ist bei ihnen die Verzerrung nach dem Rande hin noch weniger bedeutend.

Zweites Kapitel.

Die Parallel-Projektion.

§. 11.

Allgemeine Theorie.

1. Wie schon in der Einleitung erwähnt, ist diese Abbildungsweise nur ein specieller Fall der perspektivischen Abbildung. Nimmt man nämlich an, dass das Projektionscentrum in unendliche Ferne fällt, so gehen sämmtliche Projektionsstrahlen parallel und man erhält dann eine Parallelprojektion. Dieselbe wird als orthogonale oder rechtwinklige Parallelprojektion bezeichnet, wenn die Projektionsstrahlen auf der Zeichenebene senkrecht stehen; im entgegengesetzten Falle nennt man sie eine schiefe Parallelprojektion.

2. Die Parallelprojektion einer Geraden ist im Allgemeinen wieder eine Gerade; denn die parallelen Projektionsstrahlen der einzelnen Punkte der gegebenen Geraden g liegen in einer Ebene, welche die Zeichenebene in einer Geraden g', der Projektion von g schneidet.

Nur wenn g in die Richtung der Projektionsstrahlen fällt, schrumpft g' in einen Punkt zusammen.

3. Die Parallelprojektionen von Strecken, die auf einer und derselben oder auf parallelen Geraden liegen, stehen untereinander in demselben Verhältnisse, wie diese Strecken selbst. Denn sind AB und CD die gegebenen Strecken, $A'B'$ und $C'D'$ ihre Projektionen, und zieht man AB'' parallel mit $A'B'$ bis zum Projektionsstrahle BB', CD'' parallel zu $C'D'$ bis zum Projektionsstrahle DD', so sind die Dreicke ABB'' und CDD'' ähnlich, und mithin ist

$$AB'' : CD'' = AB : CD;$$

da aber $AB'' = A'B'$, $CD'' = C'D'$, so ist auch

$$A'B' : C'D' = AB : CD.$$

4. Hieraus folgt, dass die Projektion des unendlich entfernten Punktes einer Geraden auch in unendliche Ferne fällt, und aus diesem Satze ergiebt sich weiter, dass die Projektionen von parallelen Geraden auch wieder parallel sind, ein Satz, der auch direkt aus dem Umstande gefolgert werden kann, dass die Ebenen, in denen die Projektionen der verschiedenen Punkte beider Geraden liegen, unter sich parallel liegen.

5. Die Parallelprojektion eines Kreises ist im Allgemeinen eine Ellipse; in speciellen Fällen ein Kreis oder eine geradlinige Strecke oder zwei parallele Gerade.

Denn die Projektionsstrahlen in ihrer Gesammtheit bilden eine Cylinderfläche, deren Basis der gegebene Kreis ist, und der Schnitt dieser Fläche ist im Allgemeinen eine geschlossene Linie — den Fall ausgenommen, wenn die Schnittebene in Richtung der Projektionsstrahlen liegt und zwei derselben enthält. Jener Schnitt muss aber von der zweiten Ordnung sein, d. h. er kann mit einer Geraden nicht mehr als zwei Punkte gemein haben, weil der Kreis diese Eigenschaft hat und Punkte und Gerade auch in der Projektion wieder als Gerade erscheinen. Da eine geschlossene Kurve zweiter Ordnung eine Ellipse ist, so ist unser allgemeiner Satz bewiesen.

Als gerade Strecke erscheint der Kreis projicirt, wenn seine Ebene in Richtung der Projektionsstrahlen fällt.

Als Kreis endlich wird ein Kreis k projicirt, einmal, wenn die Projektionsebene parallel zur Ebene von k liegt, und dann, wenn die Projektionsebene mit dem durch das Centrum von k gehenden Projektionsstrahle denselben grössten und kleinsten Winkel einschliesst, wie die Ebene von k, aber nach gerad entgegengesetzter Richtung (Wechselschnitte).

Der Beweis hierfür ist ganz ähnlich dem in §. 2, Nr. 3 geführten.

6. Wenn die Projektionsstrahlen rechtwinklig auf der Bildebene stehen (orthographische Parallelprojektion), so ist die Projektion l' einer geradlinigen Strecke von der Länge l, welche mit der Bildebene einen Winkel φ einschliesst, durch die Gleichung

$$l' = l \cos \varphi$$

bestimmt.

7. Unter derselben Voraussetzung projicirt sich ein Kreis mit dem Halbmesser a in Form einer Ellipse, deren grosse Achse $2a$ parallel zum Durchschnitt der Kreisebene und der Bildebene liegt und deren kleine Achse $2a \cos \varphi$ ist, wo φ den Winkel zwischen beiden Ebenen bedeutet. Dem Satze in Nr. 3 zufolge projicirt sich der Kreismittelpunkt als Mittelpunkt der Ellipse.

8. Da man die schiefe Parallel-Projektion zu kartographischen Zwecken nicht verwendet, sondern sich hier auf die orthographische Projektion beschränkt, so können wir uns mit den vorstehend angeführten Sätzen begnügen und gleich zu unserm eigentlichen Thema gehen.

§. 12.

Die orthographische Projektion.

I. Die Polarprojektion.

1. Die Projektionsstrahlen laufen bei dieser Darstellung parallel zur Achse $Q_1 Q$ der Kugel, die Zeichenebene steht senkrecht zu dieser Achse, wobei es ganz gleichgültig für die Grösse der Projektion ist, ob diese Ebene durch den Mittelpunkt oder durch einen Pol oder durch einen andern Punkt der Achse geht.

2. Die Parallelkreise erscheinen in der Projektion in ihrer wahren Grösse als koncentrische Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Mittelpunkt A der Karte ist.

3. Die Meridiane erscheinen als gerade, vom Punkte A ausgehende Linien, deren Neigungswinkel den Unterschieden ihrer Längen gleich sind.

4. Die Karte kann nur die eine Hälfte der Kugel darstellen, da die Projektionen beider Hälften sich decken.

Auf **Taf. II** zeigt uns **Fig. IX** drei Viertel einer durch diese Darstellungsweise erhaltenen Karte; im letzten Viertel ist die Konstruktion der Halbmesser der einzelnen Parallelkreise angegeben, die ohne Erläuterung verständlich ist.

II. Die Meridianprojektion.

5. Die Projektionsstrahlen gehen bei dieser Darstellungsart parallel einem Durchmesser des Aequators; den durch diesen Durchmesser gehenden Meridian betrachten wir als ersten. Die Bildebene steht senkrecht auf diesem Durchmesser oder parallel zum Meridian von 90° Länge.

6. Der Meridian von 90° Länge erscheint in seiner wahren Gestalt und Grösse als ein Kreis vom Halbmesser a um den Mittelpunkt A der Karte.

Der Aequator und der erste Meridian erscheinen als zwei auf einander senkrechte Durchmesser dieses Kreises.

7. Die Parallelkreise erscheinen als gerade Linen in ihrem wahren Abstande vom Centrum; sie schneiden auf dem Meridiane von 90° Bögen ab, die ihren wahren Breitenunterschieden gleich sind.

8. Die Meridiane erscheinen als Ellipsen, deren gemeinschaftliche grosse Achse die Projektion $Q' Q'_1$ des ersten Meridianes ist und deren kleine Achse $2b$ durch die Formel

$$b = a \sin \lambda$$

bestimmt sind, wo λ die Länge bedeutet.

9. Auf **Taf. II** zeigt **Fig. X** eine derartige Abbildung der Halbkugel; die Meridiane und Parallelkreise sind von 10 zu 10° angegeben. Da der Halbmesser eines Parallelkreises von der Breite φ gleich $a \sin (90° - \varphi)$ ist, so erkennt man leicht, dass man die kleinen Achsen der Meridianellipsen leicht finden kann, indem man die auf dem Meridian von 90° Länge befindlichen Theilpunkte senk-

recht auf die Verbindungslinie der beiden Nullpunkte (die Aequator-Projektion) projicirt. Die weitere Konstruktion dieser Ellipsen erfolgt dann nach einer der in §. 4 angegebenen Methoden.

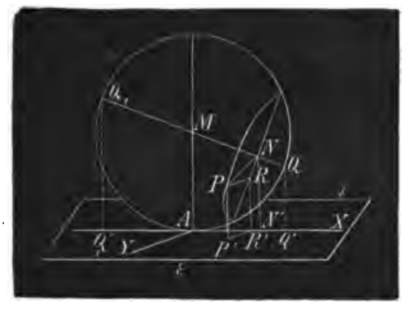
III. Horizontalprojektion.

10. Die Projektionsstrahlen gehen parallel demjenigen Halbmesser MA des ersten Meridianes, der nach dem Punkte A von der geographischen Breite α gerichtet ist; die Bildebene steht senkrecht auf diesem Halbmesser.

11. Nehmen wir die als gerade Linie erscheinende Projektion des ersten Meridianes als Achse der x, und zwar positiv von der Projektion von A nach derjenigen des nächstliegenden Poles Q, und legen wir ferner die Achse der y durch die Projektion von A, so sind die Koordinaten eines Punktes P von der Breite φ und der Länge λ durch die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} x = a (\sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \sin \alpha \cos \lambda) \\ y = a \cos \varphi \sin \lambda \end{cases}$$

Fig. 46.



gegeben. Von der Richtigkeit dieser Formeln überzeugt man sich leicht mit Hilfe der **Fig. 46**, in welcher, wie früher, die Bildebene ε als Berührungsebene im Punkte A der Kugel angenommen ist. Ist P der gegebene Punkt, $Q_1 Q$ die Achse, PR senkrecht auf der Ebene des ersten Meridianes, N der Schnittpunkt der Achse mit der Ebene des Parallelkreises durch P oder der Mittelpunkt des letzteren und sind P', R', N' die Projektionen von P, R und N, so ist

$$x = AR' = AN' - R'N'$$
$$y = R'P' = RP.$$

Da nun $RP = NP \sin PNR = NP \sin \lambda$ und $NP = a \cos \varphi$ ist, so überzeugt man sich zunächst von der Richtigkeit der Formel für y.

Ferner ist $MN = a \sin \varphi$, $NR = NP \cos \lambda = a \cos \varphi \cos \lambda$, und MN schliesst mit AX den Winkel α, NR also den Winkel $90^0 - \alpha$ ein, so dass

$$M'N' = a \sin \varphi \cos \alpha, \quad R'N' = a \cos \varphi \cos \lambda \sin \alpha$$

ist, wodurch die Formel für x gerechtfertigt ist.

Für die beiden Pole Q und Q_1 hat man

$$AQ' = a \cos \alpha, \quad AQ'_1 = - a \cos \alpha.$$

12. Die Projektionen der Parallelkreise sind Ellipsen, deren kleine Achse den Werth $2a \cos \varphi \sin \alpha$ hat und in die Achse der x fällt, während die grosse Achse dem wahren Durchmesser des Parallelkreises, $2a \cos \varphi$ gleich ist.

Denn schreibt man die Gleichungen (1) in der Form

$$\frac{x - a \sin \varphi \cos \alpha}{a \cos \varphi \sin \alpha} = - \cos \lambda$$

$$\frac{y}{a \cos \varphi} = \sin \lambda$$

und quadrirt beide, so ergiebt sich durch Addition die Gleichung

$$(2) \qquad \left(\frac{x - a \sin \varphi \cos \alpha}{a \cos \varphi \sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{a \cos \varphi}\right)^2 = 1,$$

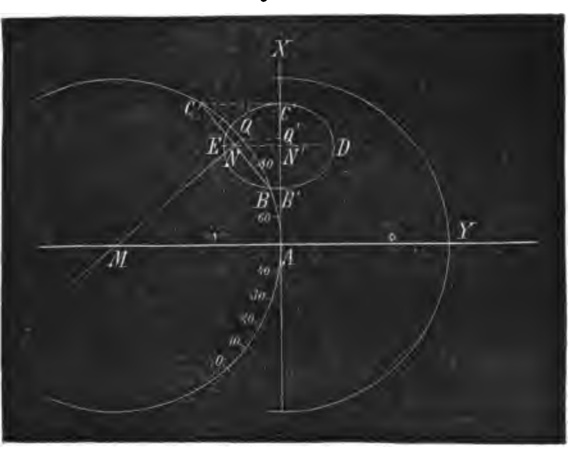
welche eine Ellipse mit den erwähnten Halbachsen bedeutet, deren Mittelpunkt auf der x-Achse in der Entfernung

$$a \sin \varphi \cos \alpha$$

von A liegt.

Mittelst der Achsen kann man diese Ellipsen leicht zeichnen. Zu dem Ende nimmt man auf der y-Achse den Punkt M so an, dass $MA = a$ ist und schlägt um M einen durch A gehenden Kreis (Fig. 47), zieht dann den Halbmesser MQ, so dass $AMQ = 90^\circ - \alpha$ ist, theilt den Kreis von Q aus ein, etwa von 10 zu 10° und verbindet je zwei Punkte gleicher Breite, wie z. B. B und C, wodurch man auf Q_1Q die Mittelpunkte der einzelnen Parallelkreise erhält, deren einer N ist.

Fig. 47.



Zieht man nun BB', CC' und NN' parallel zur y-Achse und zieht man in der gleichen Richtung durch N' eine Gerade, auf der man $DN' = N'E = NB$ abträgt, so sind $B'C'$ und DE die Achsen der Ellipse, die man nun am einfachsten nach dem Verfahren in Nr. 3 des §. 4 (S. 16) zeichnen kann. Wenn man dabei den Quadranten des Hilfskreises in neun gleiche Theile (von je 10°) theilt, so erhält man die Ellipsenpunkte, welche der Länge von 10°, 20°, 30°, . . . entsprechen, und indem man auf den verschiedenen Parallelkreisen die Punkte gleicher Länge verbindet, erhält man gleich die Abbildungen der Meridiane.

13. Da die Ellipsen, welche die verschiedenen Parallelkreise darstellen, sämmtlich dasselbe Achsenverhältniss, nämlich

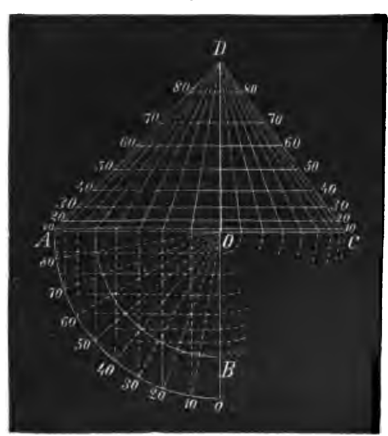
$$2a \cos \varphi : 2a \cos \varphi \sin \alpha = 1 : \sin \alpha$$

haben, so stehen auch die Abscissen und ebenso die Ordinaten,

welche den Punkten von 10°, 20°, 30°, ... Länge entsprechen, in demselben Verhältnisse zu einander; die Ellipsen sind überhaupt einander ähnlich. Dieser Umstand erleichtert die Konstruktion dieser Kurven nicht unwesentlich.

Man kann sich nämlich folgende Hilfsfigur zeichnen (**Fig. 48**).

Fig. 48.



Auf $OA = a$ errichte man senkrecht $OB = a \sin \alpha$ und konstruire über OA und OB nach dem Verfahren der Nr. 3 des §. 4 einen Ellipsenquadranten. Die acht Punkte, welche man, entsprechend 10°, 20°, 30°, ... Länge, zwischen A und B bestimmt, projicire man senkrecht auf OA und OB und erhält so auf OA die Abscissen, auf OB die Ordinaten dieser Punkte. Letztere übertrage man von OB auf die Verlängerung OC von AO. Dann errichte man auf AC die Senkrechte $OD = OA$ und verbinde alle auf AC liegende Punkte mit D. Ausserdem aber trage man noch auf OD die Abscissen, welche auf OA angegeben sind, von D aus ab und ziehe durch die so erhaltenen Punkte Parallelen mit AC, deren Endpunkte, von AC aus gezählt, mit 10, 20, 30 ... bezeichnet sind. Dann findet man z. B. auf der Parallellinie 80 — 80 links von OD die Abscissen und auf der rechten Seite die Ordinaten der einzelnen Punkte des Ellipsenquadranten von je 10° Längenunterschied und kann nun die Ellipse durch blosses Ziehen von Parallellinien zeichnen, nachdem man vorher diese Abscissen und Ordinaten vom Mittelpunkte aus auf der grossen und kleinen Achse abgetragen hat, so wie man sich ja auch die einzelnen Ellipsenpunkte in **Fig. 48** mittelst der Punkte auf OA und OB und der durch sie gelegten Parallellinien zu OB und beziehentlich OA bestimmt denken kann.

14. Konstruktion der Meridian-Abbildungen. Statt auf den einzelnen Parallelkreis-Ellipsen die Punkte gleicher Länge zu verbinden, kann man auch die Ellipsen, welche die Meridiane in der Projektion darstellen, direkt konstruiren.

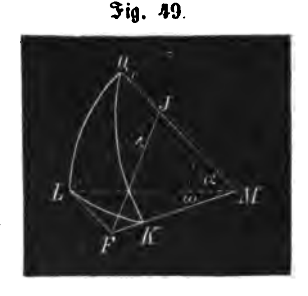
Diese Ellipsen haben alle einen gemeinsamen Mittelpunkt, nämlich den Punkt A (beziehentlich seine Projektion) und die grosse Achse hat bei allen denselben Werth $2a$, der Winkel ω aber, den sie mit der x-Achse bildet, wird durch die Gleichung

$$\tan \omega = \sin \alpha \tan \lambda$$

bestimmt. Denn, legt man durch den Mittelpunkt M der Kugel eine Ebene ζ parallel zur Bildebene ε, so schneidet dieselbe die Meridianebene in einem Durchmesser, dessen Projektion auf ε die grosse Achse der Meridianellipse ist. Gesetzt, es sei in **Fig. 49**

Q_1 der Pol, LMF die Ebene ζ, der Bogen $Q_1 L$ des ersten Meridianes ist α, der in der Ebene ζ liegende Bogen LK sei ω, endlich $Q_1 K$ sei der Bogen des Meridianes von der Länge λ. Ist dann LF die Tangente des Bogens LK im Punkte L, so steht diese Linie auf der Ebene des ersten Meridianes senkrecht; fällt man daher von L aus die Senkrechten LJ auf MQ_1, so ist auch FJ senkrecht auf MQ_1 und also Winkel $LJF = \lambda$.

Fig. 49.



Man hat dann für LF die beiden Werthe

$$a \tan \omega \text{ und } LJ \tan \lambda = a \sin \alpha \tan \lambda,$$

durch deren Gleichsetzung sich die obige Formel für $\tan \omega$ ergiebt. Eine bequeme Konstruktion von ω ist auf dieselbe Weise möglich, wie in §. 8, Nr. 14 die Konstruktion des Winkels ψ'.

Die Meridianellipsen gehen ferner durch die Projektionen von Q und Q_1 und sind damit vollständig bestimmt (vergl. die Konstruktion §. 10, Nr. 6, Fig. 41).

Es ist aber auch leicht, den Werth b der kleinen Halbachse zu berechnen. Bezeichnet man nämlich mit Q' die Projektion von Q, mit x_1 und y_1 die rechtwinkligen Koordinaten von Q', die Hauptachse der Ellipse als Abscissenachse angenommen, so ist

$$x_1 = AQ' \cdot \cos \omega, \quad y_1 = AQ' \cdot \sin \omega$$

und wegen $AQ' = a \cos \alpha$ hat man weiter

$$x_1 = a \cos \alpha \cos \omega, \quad y_1 = a \cos \alpha \sin \omega.$$

Setzt man diese Werthe in die Ellipsengleichung

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$$

ein, so ergiebt sich nach einigen Umwandlungen

$$b = a \cos \alpha \sin \lambda,$$

welcher Werth sich ebenfalls ohne Mühe konstruiren lässt. Damit sind die nöthigen Hilfsmittel zur Konstruktion der Ellipse mittelst ihrer Achsen gegeben.

Ein Beispiel einer solchen Horizontalprojektion sieht man auf **Taf. II** in **Fig. XI.** Wie bei früheren Horizontalprojektionen, der gnomonischen und stereographischen, ist auch hier die Breite des Punktes A gleich 50° angenommen worden.

IV. Aenderung der Längen und Winkel.

15. Ist μ der Abstand eines Punktes der Kugel vom Punkte A, in welchem, wie wir annehmen, die Bildebene ε die Kugel berührt, gehen also die Projektionsstrahlen parallel zu dem Radius AM, so ist

$$AP' = a \sin \mu$$

und wenn P_1 ein Punkt auf demselben durch A gehenden grössten Kreise, $AP_1 = \mu_1$ ist, so hat man

$$AP_1' - AP' = a (\sin \mu_1 - \sin \mu) = 2a \sin \frac{\mu_1 - \mu}{2} \cos \frac{\mu_1 + \mu}{2};$$

dividirt man diese Gleichung mit $PP_1 = a\,(\mu_1 - \mu)$ und lässt dann die Differenz $\mu_1 - \mu$ in Null übergehen, so erhält man für die Linearvergrösserung in radialer Richtung

$$\frac{P'P'_1}{PP_1} = \varkappa''$$

den Ausdruck

$$\varkappa'' = \cos\mu. \tag{3}$$

Es erreicht also $\varkappa''$ seinen grössten Werth im Punkte A, für $\mu = 1$, und nimmt dann ab, bis bei $\mu = 90^0$ der Werth 0 erreicht wird.

16. Sind P und M zwei Punkte eines Nebenkreises, dessen Pol A ist, und ist die Entfernung beider in Bogenmaass $\lambda_1 - \lambda$, so ist ihre wahre Entfernung

$$PM = a \sin\mu \cdot (\lambda_1 - \lambda)$$

und für die Entfernung ihrer Projektionen P' und M' hat man denselben Werth

$$P'M' = a \sin\mu \cdot (\lambda_1 - \lambda).$$

Es ist daher die Vergrösserung senkrecht zu AP' überall konstant, nämlich

$$\varkappa' = 1. \tag{4}$$

17. Mithin ist die Flächenvergrösserung

$$\nu = \varkappa'\,\varkappa'' = \cos\mu, \tag{5}$$

also vom Mittelpunkte A aus abnehmend.

18. Ist ψ der Winkel, den die Richtung $P_1 M$ (vergl. Nr. 15 und 16) mit AP einschliesst, so ist

$$\tan\psi = \frac{PM}{PP_1}$$

und für die Projektion ψ' dieses Winkels hat man die Formel

$$\tan\psi' = \frac{P'M'}{P'P'_1};$$

aus beiden Gleichungen folgt

$$\tan\psi' = \frac{P'M'}{PM} \cdot \frac{PP_1}{P'P'_1} \tan\psi$$

oder

$$\tan\psi' = \sec\mu \cdot \tan\psi. \tag{6}$$

Ganz wie in Nr. 14 des §. 10 findet man, dass die Winkeländerung $\psi' - \psi$ ihren grössten Werth erreicht, wenn

$$\tan\psi = \sqrt{\cos\mu}, \quad \tan\psi' = \sqrt{\sec\mu},$$

dann ist nämlich

$$\tan(\psi' - \psi) = \frac{1 - \cos\mu}{2\sqrt{\cos\mu}}.$$

Es ist dies das Gegenstück zur gnomonischen Projektion; bei dieser nämlich wird $\psi' - \psi$ am grössten, wenn

$$\tan\psi = \sqrt{\sec\mu}, \quad \tan\psi' = \sqrt{\cos\mu}$$

ist, und da bei ihr zwischen ψ' und ψ die Gleichung

$$\tan \psi' = \cos \mu \cdot \tan \psi$$

besteht (vergl. §. 8, Nr. 14, Gleich. 20), so ist ψ' immer kleiner als ψ und man erhält für den grössten Werth von $\tan (\psi - \psi')$ denselben Werth, den wir oben bei der Orthogonal-Projektion für den Maximalwerth von $\tan (\psi' - \psi)$ erhalten haben.

Wie auch bei allen perspektivischen Abbildungen wird bei der Orthogonal-Projektion $\psi' - \psi = 0$, wenn $\psi = 0$ oder $= 90^\circ$ ist.

19. Auch bei der Orthogonal-Projektion giebt es zu jeder Richtung ψ eine ihr konjugirte υ in dem Sinne, dass $\psi - \upsilon = \psi' - \upsilon'$ ist, (vergl. §. 10, Nr. 15), und zwar findet man auf die früher angegebene Weise

$$\tan \psi \cdot \tan \upsilon = \pm \sqrt{\cos \mu}, \quad \tan \psi' \cdot \tan \upsilon' = \pm \sqrt{\sec \mu},$$

daher auch hier die früher erwähnten harmonischen Beziehungen bestehen.

20. Wir betrachten endlich noch die Linearvergrösserung in beliebiger Richtung. Da bei der Bezeichnungsweise der Nummern 15 und 16 die Gleichungen gelten

$$P_1 M = PP_1 \sec \psi, \quad P'_1 M' = P'P'_1 \sec \psi',$$

so ist die gesuchte Linearvergrösserung

$$\varkappa = \frac{P'_1 M'}{P_1 M} = \frac{P'P'_1}{PP_1} \cdot \frac{\sec \psi'}{\sec \psi}$$

oder

$$\varkappa = \cos \mu \sqrt{\frac{1 + \sec^2 \mu \cdot \tan^2 \psi}{1 + \tan^2 \psi}}. \tag{7}$$

Hieraus sieht man, dass die extremen Werthe von $\varkappa$ eintreten für $\psi = 0$ und $\psi = 90^\circ$; im ersten Falle nämlich erreicht $\varkappa$ seinen kleinsten Werth $\cos \mu = \varkappa''$, im letzteren seinen grössten Werth $1 = \varkappa'$. Bekanntlich ist bei der gnomonischen Projektion gerade umgekehrt $\varkappa''$ der grösste und $\varkappa'$ der kleinste Werth von $\varkappa$ (vergl. §. 8, Nr. 16).

V. Vorzüge und Mängel der Orthogonal-Projektion. Historisches.

21. Die Orthogonal-Projektion zeigt uns die Kugel so, wie sie, aus grosser Entfernung gesehen, einem Beobachter wirklich erscheint. Sie ist deshalb ganz an ihrem Platze, wenn es sich um Abbildung anderer Himmelskörper, wie namentlich des Mondes, handelt. Auf solche Fälle bleibt denn auch die Anwendung dieser Darstellungsweise gegenwärtig so ziemlich beschränkt; denn ausser dem Vorzuge, dass sie eine recht natürliche Ansicht der Kugelfläche darbietet, hat sie eigentlich keine Eigenschaften, die zu ihrer Empfehlung beitrügen. Die Linien werden, wie wir gesehen haben, in radialer Richtung in gleichem Maasse nach dem Rande hin mehr und mehr verkleinert, bis herab zum Nullwerthe, während die Längen senkrecht zur radialen Richtung ihre wahre Grösse bewahren. Es werden daher sowohl die Umrisse der Länder etc.,

als die Flächen in beträchtlicher Weise verzerrt und geändert, und zudem wird am Rande Alles so dicht zusammengedrängt, dass selbst zur Darstellung meteorologischer oder physikalischer Momente, wo die Dimensionen und Umrisse der Länder weniger in Betracht kommen, diese Projektion sich nicht empfiehlt, weil man am Rande nicht mehr in ähnliche Details einzugehen im Stande ist, wie in der Mitte der Karte.

22. Die Orthogonal-Projektion ist von dem Astronomen Hipparch angegeben worden; sie kommt erst unter dem Namen Analemma, später (1551) als Astrolabium von Rojas vor. Von geographischen Kartenwerken der neuesten Zeit, die sich dieser Projektion bedienen, sind zu nennen

Laguillermie, Atlas sphéroïdal. 1843.

Garnier, Atlas sphéroïdal et universel de géographie. Fol. 60 cartes. Paris, Renouard 1862.

Sonst ist das Verfahren, wie erwähnt, fast nur für Mondkarten üblich.

Drittes Kapitel.

Die Abbildungen durch Abwickelung.

---

§. 13.

Cylindrische Abbildungen.

1. Der einfache Gedanke, welcher den hierher gehörigen Abbildungen ursprünglich zu Grunde liegt, besteht darin, eine mehr oder minder breite Zone der Erd- (oder Himmels-) Kugel zu ersetzen durch einen geraden Cylinder, auf welchem man die Meridiane als gerade Linien, den Aequator und die Parallelkreise aber als Kreise von gleicher Länge darstellt, welche die ersteren rechtwinklig schneiden. Wenn man dann den Cylinder längs einer Meridianlinie aufschneidet und in eine Ebene abwickelt, so erhält man zwei unter rechten Winkeln sich schneidende Systeme von geraden Linien, welche die Parallelkreise und Meridiane repräsentiren. Solche Karten nennt man im Allgemeinen Plattkarten. Die ältesten derartigen Karten sind die folgenden beiden Arten.

I. Quadratische Plattkarten.

2. Man nimmt einen Cylinder an, welcher die Kugel längs des Aequators berührt. Der Aequator wird dann in seiner wahren Länge dargestellt; senkrecht durch die einzelnen Theilpunkte legt man die Meridiane, auf denen man die Breitengrade ebenfalls in ihrer wahren Länge darstellt. Bei der Abwickelung erhält man dann ein Netz mit lauter quadratischen Maschen, wie uns auf **Taf. II Fig. XI** in einer Ausdehnung vom nördlichen Pol bis zu 70° südlicher Breite und von 0° bis 90° Länge zeigt.

3. Ein solches Kartennetz zeichnet sich nun allerdings durch die grosse Einfachheit seiner Konstruktion aus, ist aber sehr fehlerhaft, sobald man die Karte einigermaassen weit vom Aequator ausdehnt. Denn nehmen wir die Länge eines Aequatorbogens von

einer bestimmten Längenausdehnung, z. B. unserer Karte entsprechend von 10°, als Einheit an, so ist der Bogen des Parallelkreises von der Breite φ von gleicher Längenausdehnung gleich cos φ. Wie sich diese Werthe mit wachsender Breite ändern, zeigt folgende kleine Tabelle.

φ	cos φ	φ	cos φ
0°	1,0000	50°	0,6428
10	0,9848	60	0,5000
20	0,9397	70	0,3420
30	0,8660	80	0,1736
40	0,7660	90	0,0000

Des erwähnten Uebelstandes wegen sind solche Karten seit dem Anfange des sechszehnten Jahrhunderts nicht mehr im Gebrauch. Früher wurden sie seit Beginn des dreizehnten Jahrhunderts namentlich von den genuesischen Seefahrern viel benutzt, weil sie für die Schifffahrt mit dem Kompass eine Bequemlichkeit gewähren, die wir noch weiter unten besprechen werden, die ihnen aber mit den übrigen Plattkarten gemein ist.

II. Rechteckige Plattkarten.

4. Wenn man einen geraden Cylinder annimmt, der die Kugel längs eines mittleren Parallelkreises von der geographischen Breite φ schneidet, so werden alle Parallelkreise diesem gleich, ein Längengrad erhält also die Grösse

$$\frac{a\pi}{180} \cos \varphi .$$

Die Breitengrade dagegen bekommen, wie bei der vorigen Darstellungsform, ihre wahre Länge. Die Maschen des Kartennetzes sind demnach lauter gleich grosse Rechtecke, deren Breite sich zur Länge wie 1 : cos φ verhält.

Auf **Taf. II** zeigt uns **Fig. XIII** ein derartiges Kartennetz in gleicher Ausdehnung wie das Netz **Fig. XII**; der Cylinder, welcher der Darstellung zu Grunde liegt, schneidet die Kugel längs der Parallelkreise von 45° Breite. Die Figur zeigt uns noch ausserdem den Quadranten des Parallelkreises von 45° nördl. Breite und einzelne Theile desselben, deren Längen dann auf dem stark ausgezogenen Aequator abgetragen sind.

5. Auch diese Karten dürfen nicht über viele Breitengrade ausgedehnt werden, wenn sie nicht ganz wesentlich falsch werden sollen. Am brauchbarsten sind sie für die Nähe des Aequators, weil für kleine Werthe von φ der Cosinus sich nicht sehr ändert, die Parallelkreise also wirklich nahezu gleich gross sind. Beispielsweise hat der verdiente Geograph I. B. Bourguignon d'Anville sich dieser Abbildungsweise mit Vortheil zum Entwurfe seiner im Jahre 1776 publicirten Karte von Guinea bedient.

Uebrigens ist diese Darstellnngsweise sehr alt und schon bei den Geographen des Alterthums viel im Gebrauch. Sie rührt vielleicht schon von Anaximander her (um die Mitte des sechsten Jahrhunderts v. Chr.), welcher der erste gewesen sein soll, der eine Karte der damals bekannten Erde zeichnete. Ptolemäus, der sich ihrer gleichfalls bediente, nahm als mittleren Parallelkreis den von Rhodus an.

6. Bei derartigen Plattkarten, mag man nun den Aequator oder irgend einen andern Parallelkreis als Basis des abzuwickelnden Cylinders betrachten, hat es nicht die geringste Schwierigkeit, der ellipsoidischen Gestalt der Erde Rechnung zu tragen. Man hat nur nöthig dem Breitengrade statt der Grösse

$$\frac{a\pi}{180^0} = 0{,}0174533 \cdot a = \mu\, a$$

die Grösse

$$\frac{a\,(1-\varepsilon^2)\,\mu}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}^{\,3}}$$

beizulegen, wo φ die mittlere Breite bedeutet (vergl. S. 42), und die so berechneten, nach den Polen hin zunehmenden Längen auf den Meridianen abzutragen.

Eine von den beiden vorhergehenden wesentlich verschiedne ist

III. Lambert's normale isocylindrische Projektion.

7. Bei derselben nimmt man an, dass der abzuwickelnde Cylinder die Kugel längs des Aequators berührt. Die verlängerten Meridianebenen schneiden den Cylinder in parallelen Geraden, welche die Meridiane darstellen, und die verlängerten Ebenen der Parallelkreise schneiden denselben in Kreisen, welche die Parallelkreise repräsentiren. Nach der Abwickelung zeigt uns die Karte ein Netz rechtwinklig sich kreuzender gerader Linien. Die Längengrade besitzen auf allen Parallelkreisen dieselbe Grösse, nämlich diejenige, die sie im Originale auf dem Aequator haben; die Breitengrade dagegen werden nach den Polen hin immer kleiner, denn es ist die Entfernung der Geraden, welche den Parallelkreis von φ^0 Breite repräsentirt, vom Aequator durch die Gleichung gegeben

$$y = a \sin \varphi.$$

Auf **Taf. II** zeigt **Fig. XIV** die Konstruktion dieser Karte und ein Stück derselben, von Pol zu Pol und von 0° bis 30° Länge.

8. Da die Fläche einer Kugelzone gleich der Länge des Aequators multiplicirt mit der Höhe der Zone ist, und da bei der vorliegenden Darstellungsweise sowohl die Länge des Aequators als die Höhe der verschiedenen Zonen unverändert auf die Karte übertragen werden, wo diese Zonen sich als Rechtecke darstellen, so erscheinen alle Kugelzonen auf der Karte mit ihrer wahren Fläche. Daraus ergiebt sich weiter, dass überhaupt jedes Flächenstück auf der Karte gleich ist dem entsprechenden Stück der Kugelfläche. Die Projektion wahrt also die Grösse der Flächen oder ist äquivalent (S. 4).

9. Wie schon in der Ueberschrift angedeutet, rührt diese Cylinderprojektion, auf die wir im nächsten Kapitel nochmals zurückkommen werden, von dem um die Kartographie hoch verdienten deutschen Mathematiker Joh. Heinr. Lambert (1728 — 1777) her, der dieselbe in seinen Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik zuerst angegeben hat. Neuerdings hat der englische Astronom C. Piazzi Smyth dieselbe in einer besondern Schrift wieder empfohlen oder vielmehr als neu in Vorschlag gebracht.*)

IV. Zweck der Plattkarten. Die Loxodromie.

10. Der eigentliche Grund der frühzeitigen Verbreitung der Plattkarten, namentlich im Mittelalter, war nicht die Einfachheit ihrer Konstruktion, sondern ihre Zweckmässigkeit für den Seefahrer; wir sehen sie daher vorzugsweise gern zu Seekarten verwendet. Für den Seefahrer hat es weniger Interesse, die Umrisse und Gestalten der Ländermassen naturgetreu auf der Karte angegeben zu finden, wenn er nicht an den Küsten hinfährt, sondern auf das offene Meer hinaus geht. Schon seit dem zwölften Jahrhunderte war aber den Europäern das einfache Instrument bekannt, welches zur See, wenn alle andern Mittel fehlen, gestattet, jederzeit die Himmelsrichtung zu erkennen: die Magnetnadel. Im Besitze derselben konnte also der Schiffer stets beobachten, nach welcher Himmelsrichtung sich sein Schiff bewegte und war so im Stande, für die Beibehaltung des richtigen Courses Sorge zu tragen. Es musste dabei als das Einfachste erscheinen, soweit als möglich immer dieselbe Richtung des Schiffes beizubehalten, und nun stellte sich die Nothwendigkeit heraus, auf einfache Weise mittelst der Karte diejenige Richtung zu ermitteln, in welcher das Schiff von einem bestimmten Punkte A nach einem andern gegebenen Punkte B gelangt. Dies kann aber am einfachsten geschehen, wenn die Linie, welche das Schiff auf der Erdoberfläche beschreibt, wenn es immer nach derselben Himmelsrichtung geht, sich auf der Karte als eine gerade Linie darstellt. Dazu ist aber nothwendig, dass die Meridiane durch äquidistante Parallelen und die Parallelkreise durch Gerade dargestellt werden, die auf jenen senkrecht stehen. Um diese Verhältnisse besser zu übersehen, wollen wir uns jetzt zunächst mit der Linie etwas näher bekannt machen, die ein Schiff auf der Kugelfläche beschreibt, wenn es immer nach derselben Himmelsrichtung segelt, also alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet.

11. Wenn ein Punkt sich auf einer Kugelfläche so bewegt, dass er die verschiedenen Meridiane unter gleichen Winkeln schneidet, so beschreibt er eine krumme Linie, die den Namen loxodromische Linie oder Loxodromie (Linie des schiefen Laufes, von λοξός = schief und ὁ δρόμος der Lauf abgeleitet) führt; Leibniz hat sie auch als rhombische Linie (*rhombus*, französ. *rumb* = Windstrich) bezeichnet.

---

*) *On an equal-surface projection for maps of the world and its application to certain anthroprological questions. Ediuburgh, Edmonston 1870*

Es sei P ein Punkt der Kugeloberfläche, φ seine Breite, λ die Länge, M ein benachbarter Punkt der loxodromischen Linie, φ_1 und λ_1 Breite und Länge desselben; ferner werde durch M der Parallelkreis gelegt, welcher den Meridian von P im Punkte P_1 schneidet. Bezeichnet man dann den konstanten Winkel, welchen die loxodromische Linie mit dem Meridiane einschliesst, mit α, so ist

$$\frac{P_1 M}{PP_1} = \tan \alpha.$$

Da aber $P_1 M = a \cos \varphi \cdot (\lambda_1 - \lambda)$, $PP_1 = a\,(\varphi_1 - \varphi)$ ist, so hat man die Gleichung

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\varphi_1 - \varphi} \cos \varphi = \tan \alpha, \tag{1}$$

in welcher $\varphi_1 - \varphi$, sowie $\lambda_1 - \lambda$ bis zur Grenze Null abnehmend zu denken sind.

Um aus der Gleichung (1) eine Gleichung zwischen der Breite φ und der Länge λ abzuleiten, welche gestattet, zu jedem Werthe der einen den zugehörigen der anderen abzuleiten, führen wir eine neue Grösse ω ein, welche wir durch die Gleichung

$$\omega = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \tag{2}$$

definiren. Bezeichnet man mit ω_1 denjenigen Werth von ω, welcher dem Werth φ_1 entspricht, so findet man

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}{(1 - \sin \varphi_1)(1 - \sin \varphi)} \cdot \frac{\sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2}}{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}},$$

und wenn man hier $\varphi_1 - \varphi$ in Null übergehen lässt, so verwandelt sich, wie schon oft erwähnt, der zweite Faktor der rechten Seite in die Einheit und man erhält

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{2 \cos \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2} = \frac{2\omega}{\cos \varphi},$$

Multiplicirt man diese Gleichung und die Gleichung (1) oder bestimmter

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{2\omega}{\cos \varphi} \text{ mit } \tan \alpha = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\varphi_1 - \varphi} \cos \varphi,$$

so verschwindet φ ganz und man erhält die neue Gleichung

$$(\omega_1 - \omega) \tan \alpha = 2\omega\,(\lambda_1 - \lambda). \tag{3}$$

Wir wollen uns jetzt das ganze Intervall von $\lambda = 0$ bis zu einem bestimmten Werthe λ in eine sehr grosse Anzahl n gleich grosser Theile getheilt denken; $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n = \omega$ mögen diejenigen Werthe sein, welche den Werthen der Länge

$$0,\ 1 \cdot \frac{\lambda}{n},\ 2 \cdot \frac{\lambda}{n},\ \ldots,\ n \cdot \frac{\lambda}{n} = \lambda$$

entsprechen. Statt der Gleichungen (3) kann man dann die folgenden schreiben

$$(\omega_1 - \omega_0) \tan \alpha = 2\omega_0 \cdot \frac{\lambda}{n},$$

$$(\omega_2 - \omega_1) \tan \alpha = 2\omega_1 \cdot \frac{\lambda}{n},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(\omega_n - \omega_{n-1}) \tan \alpha = 2\omega_{n-1} \cdot \frac{\lambda}{n},$$

die man auch wie folgt umwandeln kann·

$$\omega_1 = \omega_0 \left(1 + 2 \cot \alpha \cdot \frac{\lambda}{n}\right)$$

$$\omega_2 = \omega_1 \left(1 + 2 \cot \alpha \cdot \frac{\lambda}{u}\right)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\omega = \omega_n = \omega_{n-1} \left(1 + 2 \cot \alpha \,.\, \frac{\lambda}{n}\right).$$

Die Multiplikation dieser n-Gleichungen ergiebt sofort

$$\omega = \omega_0 \left(1 + 2 \cot \alpha \,.\, \frac{\lambda}{n}\right)^n, \tag{4}$$

wo wir n unendlich gross zu nehmen haben, um ein richtiges Resultat zu erlangen.

Nehmen wir nun als ersten Meridian denjenigen an, in welchem die Loxodromie den Aequator schneidet, setzen also $\varphi = 0$ für $\lambda = 0$, so ergiebt sich mittelst der Gleichung (2)

$$\omega_0 = 1. \tag{5}$$

Um ferner die Bedeutung der rechten Seite der Gleichung (4) zu erkennen, wollen wir vorläufig statt des dort stehenden Ausdruckes den einfacheren

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

in Betracht ziehen. Da nun nach dem binomischen Lehrsatze allgemein

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$

so kann man vorstehenden Ausdruck für $x = \frac{1}{n}$ in eine Reihe entwickeln, der man die Form geben kann

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$

und, wenn man $n = \infty$ setzt, so verschwinden alle die Brüche $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ und man erhält

(5) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,\ n=\infty.$

Den Werth der rechts stehenden unendlichen Reihe bezeichnet man herkömmlicher Weise mit dem Buchstaben e; bei wirklicher Ausrechnung erhält man

$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59\ \ldots$$

Was nun den allgemeineren Ausdruck

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

anlangt, so kann man demselben die Form geben

$$\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{z}}\right)^{\frac{n}{z}}\right]^n$$

und da $\frac{n}{z}$ ebenfalls unendlich gross ist, so ist für $n=\infty$

$$\left(1+\frac{1}{\frac{n}{z}}\right)^{\frac{n}{z}} = e$$

und mithin

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

Für $z = 2\cot\alpha\cdot\lambda$ erhält man die rechte Seite der Gleichung (4). Mithin ist

$$\omega = e^{2\cot\alpha\cdot\lambda}$$

oder umgekehrt

$$2\cot\alpha\cdot\lambda = l\,\omega,$$

wo das Zeichen l den sogenannten natürlichen Logarithmus bedeutet, dessen Basis die Zahl e ist. Durch Einsetzung des Werthes von ω aus Gleichung (2) ergiebt sich schliesslich die gesuchte Gleichung der loxodromischen Linie

$$(6)\qquad \lambda = \frac{1}{2}\tan\alpha\, l\,\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \tan\alpha\, l\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Es mag noch besonders daran erinnert werden, dass in dieser Formel λ nicht in Graden, sondern als Bogen auf einem Kreise mit dem Halbmesser 1 angegeben ist, so dass man also $\frac{\pi}{2}$ statt 90^0, $\frac{\pi}{4}$ stattt 45^0 schreibt etc.

12. Im Bezug auf die Form der Loxodromie ergeben sich aus der Gleichung (6) sofort zwei Eigenschaften.

Zunächst erkennt man, dass es zu jedem Werthe von φ nur einen einzigen Werth von λ giebt; die Loxodromie schneidet also einen bestimmten Parallelkreis nur ein einziges Mal, indem sie sich, vom Aequator ausgehend, immer weiter von diesem entfernt und dem Pole nähert.

Dagegen kann man einen bestimmten Werth λ um 2π, $2 \cdot 2\pi$, $3 \cdot 2\pi$, ..., überhaupt um jede beliebige Anzahl ganzer Umläufe vermehren und wird immer einen zugehörigen, im ersten Quadranten liegenden Werth von φ erhalten. Die loxodromische Linie schneidet also den Meridianquadranten unzählig viele Mal, indem sie sich dem Pole immer mehr und mehr in spiralförmigen Windungen nähert.

13. Nach dieser Betrachtung der loxodromischen Linie auf der Kugelfläche kehren wir zu unserer Plattkarte zurück.

Es sei P ein Punkt der Kugel, N der Schnittpunkt seines Meridianes mit dem Aequator, A der Schnittpunkt des ersten Meridianes. Dann ist

$$AN = a\lambda, \quad NP = a\varphi.$$

Die entsprechenden Punkte der Karte mögen P', N', A' heissen. Nehmen wir dann an, dass der Aequator der Karte nicht gerade die Abwickelung des Kugeläquators, sondern diejenige eines beliebigen Parallelkreises vom Halbmesser b ist, so haben wir

$$A'N' = x = b\lambda,$$

und $N'P'$ wollen wir mit y bezeichnen, wobei wir uns diese Grössen in irgend einer Weise von der Breite φ abhängig denken. Ist dann ψ der Winkel, den eine durch P gehende loxodromische Linie mit dem Meridiane einschliesst, so ist zufolge Gleichung (1), wenn man dort α mit ψ vertauscht

$$\tan\psi = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\varphi_1 - \varphi}\cos\varphi, \quad \varphi_1 - \varphi = 0. \tag{7}$$

Wenn man dagegen mit ψ' die Abbildung dieses Winkels bezeichnet, so hat man die Gleichung

$$\tan\psi' = \frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{b\,(\lambda_1 - \lambda)}{y_1 - y} \tag{8}$$

und durch Vergleichung der beiden letzten Gleichungen erhält man weiter

$$\tan\psi' = \frac{b\,(\varphi_1 - \varphi)}{(y_1 - y)\cos\varphi}\cdot\tan\psi. \tag{9}$$

Bei den quadratischen Plattkarten ist $b = a$ und $y = a\varphi$, folglich

$$\tan\psi' = \sec\varphi\cdot\tan\psi, \tag{10}$$

bei den rechteckigen Plattkarten bleibt b, aber y hat ebenfalls den Werth $a\varphi$, mithin ist

$$\tan\psi' = \frac{b}{a}\sec\varphi\cdot\tan\psi; \tag{11}$$

bei Lambert's isocylindrischer Projektion endlich ist $b = a$ und $y = a\sin\varphi$, mithin

$$\frac{y_1 - y}{\varphi_1 - \varphi} = a\,\frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi}{\varphi_1 - \varphi}$$

und für $\varphi_1 - \varphi = 0$ geht, wie wir schon oft gesehen haben, die rechte Seite dieser Gleichung in $a\cos\varphi$ über. Sonach hat man für diese Karte.

(12) $$\tan \psi' = \sec {}^2\varphi \cdot \tan \psi.$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dass nur für $\psi = 0^0$ oder 90^0 die beiden Winkel ψ und ψ' gleich sind bei den oben besprochenen drei Karten; dieselben geben also die Winkel gegen den Meridian im Allgemeinen nicht richtig an, eine Bemerkung, die rücksichtlich der quadratischen und rechteckigen Plattkarten im Alterthum schon Ptolemäus gemacht hat und die im Anfange des sechszehnten Jahrhunderts von Martin Cortes und später von Pedro Nunez wiederholt worden ist, bis endlich Mercator die richtige Abhilfe fand.

Uebrigens bemerkt man, dass die Beziehung zwischen ψ' und ψ die allgemeine Form

$$\tan \psi' = k \tan \psi$$

besitzt, woraus (nach §. 10, Nr. 15) folgt, dass die Winkeländerung $\psi' - \psi$ ihren grössten Werth erreicht für

$$\tan \psi = \pm \sqrt{\frac{1}{k}}, \quad \tan \psi' = \pm \sqrt{k}.$$

Auch giebt es zu jedem Winkel ψ einen konjugirten Winkel υ im Sinne der Nr. 15 des §. 10, so dass $\psi - \upsilon = \psi' - \upsilon'$ und zwar ist

$$\tan \psi \tan \upsilon = \frac{1}{k}, \quad \tan \psi' \tan \upsilon' = k.$$

Noch wichtiger aber ist folgende Betrachtung. Bewegt man sich auf der loxodromischen Linie, welche im Punkte P den Meridian unter dem Winkel ψ schneidet, so bleibt ψ unverändert, auch wenn φ sich ändert. In letzterem Falle aber wird $\tan \psi'$ und mithin auch ψ' selbst sich ändern, weil die rechte Seite der Gleichungen (10), (11) und (12) einen von φ abhängigen Faktor hat. Die Abbildung der Loxodromie schneidet also die Abbildungen der verschiedenen Meridiane unter verschiedenen Winkeln und kann folglich keine Gerade sein.

Nur wenn der von φ abhängige Faktor $\sec \varphi$ oder $\sec {}^2\varphi$ nahezu unveränderlich ist, was für kleine Werthe von φ, also in der Nähe des Aequators der Fall ist, kann man die Abbildung der Loxodromie annähernd als eine gerade Linie betrachten.

V. Mercator's Projektion.

14. Sonach entsprechen die betrachteten Karten dem Zwecke, zu welchem man sie bestimmt hat, nur annäherungsweise innerhalb eines eng begrenzten Gebietes. Dagegen wird dieser Zweck vollständig erreicht, die Abbildung der Loxodromie wird eine gerade Linie, welche die Abbildungen der Meridiane unter demselben Winkel schneidet, wie die Loxodromie die Meridiane selbst, wenn man y so wählt, dass in Gleichung (9) der Faktor von $\tan \psi$ den Werth 1 erhält. Man kann diese Bedingung in der Form schreiben

(13) $$\frac{y_1 - y}{\varphi_1 - \varphi} \cos \varphi = b.$$

Diese Gleichung hat aber ganz die Form von Gleichung (1), nur dass

y_1 und y statt λ_1 und λ, sowie b statt $\tan \alpha$

gesetzt ist. Auf demselben Wege, wie man von Gleichung (1) auf Gleich. (6) gelangt, lässt sich daher aus (13) der Werth von y ableiten:

$$(14) \qquad y = b\, l \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

während $x = b\lambda$ ist. Man sieht, dass die Wahl von b statt a nur den Maassstab der Karte ändert.

15. Die erste Karte dieser Art wurde von Gerhard Mercator im August 1569 in Duisburg konstruirt. Wiewohl Mercator keine ausführliche Theorie dieser Projektionsart gegeben hat, so hat er doch das Princip derselben vollständig bestimmt und klar in den Worten ausgedrückt: „*Gradus latitudinum versus utrumque polum auximus pro incremento parallelorum supra rationem, quam habent ad aequinoctialem.*“ (Wir lassen die Breitengrade in demselben Grade wachsen, wie die Parallelkreise grösser sind, als dem Verhältnisse entspricht, in welchem sie zum Aequator stehen). Um diese Erklärung zu verstehen, erinnere man sich, dass ein Parallelkreis gleich ist dem Aequator multiplicirt mit $\cos \varphi$; macht man nun auf der Karte den Parallelkreis ebenso lang, wie den Aequator, so vergrössert man ihn im Verhältnisse von $1 : \sec \varphi$; und in demselben Maasse hat man nach Mercators Vorschrift den Meridiangrad von der Breite φ zu vergrössern im Verhältnisse zum Aequatorgrade.

Natürlich ist die Konstruktion nur angenähert, wenn man auf die angedeutete Weise die Vergrösserung nur von Grad zu Grad ändert; bei weitem genauer wird das Netz, wenn man von Minute zu Minute fortgeht und die absolute Länge einer Minute von der Breite φ gleich setzt der Länge einer Minute auf dem Aequator, multiplicirt mit $\sec \varphi$.

Uebrigens führt die Gleichung (13) ohne weiteres auf diese Formel, wenn man $\varphi_1 - \varphi$ nicht gleich Null setzt, sondern als eine Minute annimmt; dann ist $y_1 - y$ eine Meridianminute, und wenn man die Gleichung in der Form

$$y_1 - y = b \cdot 1' \cdot \sec \varphi$$

schreibt, so drückt $b \cdot 1'$ eine Aequatorminute aus und man hat genau die vorstehende Regel.

Diese Regel ist zuerst von dem Engländer Eduard Wright in seinem Werke *Certain Errors in Navigation detected and corrected. London 1589,* angegeben worden, wo sich auch eine Tafel der Werthe von y, von Minute zu Minute fortschreitend findet. Man hat deswegen irrthümlich Wright bisweilen als den Erfinder dieser Karten bezeichnet, wiewohl derselbe in der Vorrede des erwähnten Werkes ausdrücklich angiebt, dass er seine Regel von der Karte Mercators abgeleitet hat.

Die richtige Formel zur Berechnung von y hat zuerst Henry Bond im Jahre 1645 angegeben.

16. Da überall $\psi = \psi'$ ist, so sind überhaupt alle Winkel auf der Karte den entsprechenden Winkeln auf der Erdoberfläche gleich, die Karte liefert also eine konforme Abbildung. Wir werden daher der Mercator-Projektion im fünften Kapitel nochmals begegnen, wo wir auch die Abplattung der Erde berücksichtigen werden.

Um die Linearvergrösserung $\varkappa$ für einen Punkt der Breite φ zu finden, haben wir das Meridianelement auf der Karte gleich $y_1 - y$, auf der Kugel dagegen $a\,(\varphi_1 - \varphi)$, und mithin ist, weil die Vergrösserung um einen Punkt herum der Konformität wegen nach allen Richtungen gleich ist,

$$\varkappa = \frac{y_1 - y}{a\,(\varphi_1 - \varphi)} \text{ für } \varphi_1 - \varphi = 0.$$

Wir wissen aber, dass die rechte Seite den Werth $\sec \varphi$ hat. Mithin ist

$$\varkappa = \sec \varphi.$$

Die Flächenvergrösserung hat demnach den Werth

$$\sec^2 \varphi.$$

Rücksichtlich der Verwendung ist zu bemerken, dass die Karten nach Mercators Projektion gegenwärtig bei den Seefahrern allgemein im Gebrauche sind. Da sie konform sind, also eine in den kleinsten Theilchen dem Originale ähnliche Abbildung geben und die Formen nicht verzerren, so eignen sie sich auch zu physikalischen Uebersichtskarten sehr gut; nur ist hier in manchen Fällen der Uebelstand störend, dass diese Karten sich nicht bis an die Pole fortsetzen lassen. Da nämlich $\tan 90^0 = \infty$ ist, so ist für $\varphi = 90^0$ auch $y = \infty$. Die Grade werden daher in hohen Breiten sehr gross und man muss die Karte schliesslich abbrechen. Bei den gewöhnlichen Seekarten sind aber gerade die Partien in der Nähe der Pole am ehesten entbehrlich, da ja jenseits des 83. Grades der Breite unsere Kenntniss der Erdoberfläche ohnedies vorläufig aufhört.

17. In folgender Tabelle geben wir die Werthe von y, von 5 zu 5^0 fortschreitend für $a = 1$.

Werthe von $y = l \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$.

φ	y	φ	y
0^0	0	50^0	1,01
5	0,0874	55	1,1542
10	0,1754	60	1,3170
15	0,2648	65	1,5065
20	0,3564	70	1,7354
25^0	0,4509	75	2,0276
30	0,5493	80	2,4362
35	0,6528	85	3,1313
40	0,7629	90	∞
45	0,8814		

VI. Aequivalente Cylinderprojektion einer Kugelzone.

18. Wenn es sich um die Abbildung einer Kugelzone handelt, deren mittlerer Parallelkreis die Breite ψ besitzt und also den Umfang

$$2a\,\pi \cos \psi$$

hat, so kann man sich einen normalen, der Erdachse parallelen Cylinder denken, dessen Basis jener Kreis ist, und man kann nun eine Kugelzone, die sich von der Breite ψ bis zur Breite φ erstreckt, durch eine cylindrische Zone von der Höhe y repräsentiren. Es ist dann

die Fläche der Cylinderzone $= 2a\,\pi \cos \psi \cdot y,$

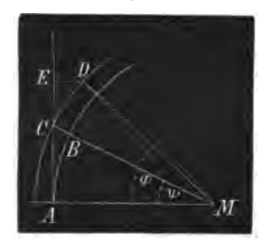
„ „ „ Kugelzone $= 2a^2\pi (\sin \varphi - \sin \psi)$

$$= 4a^2\pi \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}.$$

Stellt man nun die Bedingung der Aequivalenz, der Gleichzeit der Kugel- und Cylinderzone, so erhält man für y die Formel

$$y = \frac{a (\sin \varphi - \sin \psi)}{\cos \psi} = \frac{2a \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}}{\cos \psi}.$$

Fig. 50.



Der mittlere Parallelkreis wird natürlich in seiner wahren Grösse dargestellt, die Meridiane dagegen erscheinen als äquidistante, parallele Gerade.

Den Werth y kann man übrigens leicht konstruiren. Ist in Fig. 50 $MA = a$, $\angle AMB = \psi$ und verlängert man die in A auf MA errichtete Senkrechte bis zum Schnittpunkte C mit dem verlängerten Halbmesser MB, so ist

$$MC = \frac{a}{\cos \psi},$$

und wenn man nun mit MC als Halbmesser einen Kreis um M schlägt, $\angle AMD = \varphi$ macht und DE parallel zu MA zieht, so ist $CE = y$.

§. 14.

Fortsetzung.

I. Allgemeines.

1. Im vorhergehenden Paragraphen haben wir eine Anzahl Cylinderprojektionen kennen gelernt, bei denen die Cylinderachse mit der Achse der Erd- oder Himmelskugel zusammenfällt. Es giebt aber noch analoge Darstellungen, bei denen als Achse des Cylinders irgend ein Durchmesser des Aequators oder auch irgend ein beliebiger Durchmesser der Kugel angenommen wird. Im gegenwärtigen Paragraphen sollen einige derartige Abbildungsweisen näher besprochen werden.

2. Wir wollen zunächst annehmen, ein Durchmesser BB_1 des Aequators sei die Achse des Cylinders und letzterer berühre die Kugel längs des Meridianes, der von B und B_1 um 90° absteht.

Die Abbildung dieses Meridianes, des ersten Meridianes, ist eine gerade Linie, die Achse der y, deren Theile gleich den Theilen des Meridianes selbst sind.

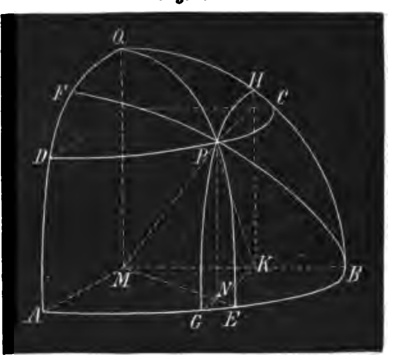
Der Aequator erscheint als eine auf der vorigen senkrechte Gerade, als Achse der x.

Legt man auf der Kugel durch die Endpunkte B und B_1 des Aequatordurchmessers, welcher die Cylinderachse bildet, grösste Kreise, etwa von 10 zu 10 Grad, so erscheinen dieselben in der Abbildung als Gerade, die parallel zur x-Achse gehen und gleichweit von einander abstehen.

Legt man ferner Kreise auf der Kugel, welche zum Aequator parallel gehen, so erscheinen diese als Gerade, welche parallel zur y-Achse gehen.

3. Es geht hieraus hervor, dass ein Punkt der Kugel als Durchschnitt zweier Kreise erscheint, die analog den Meridianen und Parallelkreisen liegen, nur dass an die Stelle des Aequators der erste Meridian getreten ist.

Fig. 51.



Es sei in **Fig. 51** M der Mittelpunkt der Kugel vom Halbmesser a, AQ ein Quadrant des ersten Meridianes, AB ein Quadrant des Aequators. Ist nun P ein beliebiger Punkt des abgebildeten Kugeloktanten, so hat man zu seiner Bestimmung nach alter Weise

den durch P gehenden Meridian QE und den Parallelkreis CD und die Koordinaten sind

die Breite $EP = AD = \varphi$ und

die Länge $DP = AE = \lambda$.

Nach der neuen Weise ist aber P bestimmt mittels

des durch B und P gehenden grössten Kreises BF und des zum ersten Meridiane parallelen Kreises GH; Koordinaten sind

$$FP = AG = \varphi_1 \text{ und } GP = AF = \lambda_1.$$

4. Um ein Paar Formeln zur Verwandelung der neuen Koordinaten in die alten und umgekehrt zu erhalten betrachten wir die von P auf die Aequatorebene gefällte Senkrechte PN, welche man zunächst aus dem rechtwinkligen Dreiecke MPN mittelst der Formel

$$PN = MP \sin EMP = a \sin \varphi$$

erhalten kann. Andererseits ist aber auch im rechtwinkligen Dreiecke PKN

$$PN = KP \sin GKP = KP \sin \lambda_1,$$

und da im rechtwinkligen Dreiecke MPK

$$KP = MP \sin BP \doteq a \sin (90^0 - \varphi_1) = a \cos \varphi_1$$

ist, so hat man auch

$$PN = a \cos \varphi_1 \sin \lambda_1.$$

Die Gleichsetzung beider Werthe von PN giebt

$$\sin \varphi = \cos \varphi_1 \sin \lambda_1.$$

Aus der vollständigen Analogie zwischen φ und λ einer- und φ_1 und λ_1 andererseits folgt, dass auch

$$\sin \varphi_1 = \cos \varphi \sin \lambda$$

ist. Aus diesen zwei Gleichungen entwickelt man noch durch einfache Rechnung

$$\begin{aligned} \cot \lambda &= \cos \lambda_1 \cot \varphi_1 \\ \cot \lambda_1 &= \cos \lambda \cot \varphi \end{aligned}$$

und hat nunmehr die Transformationsformeln

$$(1) \quad \begin{cases} \sin \varphi_1 = \cos \varphi \sin \lambda, & \sin \varphi = \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 \\ \cot \lambda_1 = \cos \lambda \cot \varphi, & \cot \lambda = \cos \lambda_1 \cot \varphi_1. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir gleich zur Besprechung einiger hierher gehörigen Projektionen über.

II. Die Cassini'sche Projektion.

5. Diese Projektion ist von dem Astronomen *César-François Cassini de Thury* (1714 — 1784) bei der grossen Karte von Frankreich in Anwendung gebracht worden, die unter seiner, seines Sohnes Jean Dominique und Maraldi's Leitung im Jahre 1745 begonnen und 1793 von dem jüngeren Cassini vollendet wurde.*)

Es ist verhältnissmässig leicht, die Richtung eines Meridianes auf der Erde anzugeben und ebenso kann man ohne grosse Schwierigkeit eine Linie senkrecht zu diesem Meridiane angeben. Letztere liegt aber in dem grössten Kreise, der senkrecht auf dem Meridiane steht, im sogenannten ersten Vertikalkreise des Schnittpunktes beider Kreise. Der Parallelkreis berührt diesen Vertikalkreis nur in einem Punkte. Wenn man nun (**Fig. 51**) auf einem festen Meridiane, den man als ersten annimmt, den Bogen $AF = \lambda_1$ und auf dem ersten Vertikal von F den Bogen $FP = \varphi_1$ misst, so ist der Ort P bestimmt. Statt des Punktes A des Aequators kann man auch irgend einen anderen festen Punkt O des ersten Meridianes annehmen und von ihm aus die Koordinaten bis zum Punkte F messen.

Cassini nahm als ersten Meridian den durch die Pariser Sternwarte gehenden an, diese Sternwarte selbst bildete den Anfangspunkt O für die Messung der Koordinaten auf dem ersten Meridiane. Auf der Karte erscheint der erste Meridian als gerade Linie (y-Achse) und die darauf senkrechten Bögen grösster Kreise erscheinen als senkrechte Gerade; die Koordinaten OF und FP jedes Punktes P sind nach ihrem richtigen Grössenverhältniss, im Verhältnisse 86400 : 1 verkleinert, auf der Karte dargestellt. Letz-

---

*) *Carte géometrique de la France. 184 flls. 1750—1793. Paris, Longuet.* (Maassstab $^1/_{86400}$.)

tere enthält gar keine Meridiane und Parallelkreise, sondern nur die beiden Systeme sich rechtwinklig kreuzender Geraden.

6. Es ist leicht von den Koordinaten der Cassini'schen Karte auf die Länge und Breite überzugehen.

Ist φ_0 die geographische Breite des Anfangspunktes O und wird der Bogen OF mit y bezeichnet (und auf der Karte durch die geradlinige Strecke y dargestellt), so ist $\varphi_0 + y$ identisch mit der Grösse $AF = \lambda_1$ unserer Formel (1), wogegen $FP = x$ mit φ_1 zusammenfällt. Wir haben daher die Formeln

$$(2) \qquad \begin{cases} \sin x = \cos \varphi \sin \lambda \\ \cot (\varphi_0 + y) = \cos \lambda \cot \varphi. \end{cases}$$

Aus diesen zwei Gleichungen erhält man durch Elimination von λ die Gleichung der Abbildung des Parallelkreises von der Breite φ

$$(3) \qquad \sin^2 x + \cot^2(\varphi_0 + y) \sin^2\varphi = \cos^2\varphi$$

und durch Elimination von φ ergiebt sich die Gleichung der Abbildung des Meridianes von der Länge λ

$$(4) \quad [\cos^2\lambda + \cot^2(\varphi_0 + y)]\,[\sin^2\lambda - \sin^2 x] = \sin^2\lambda \cos^2\lambda.$$

Meridiane wie Parallelkreise stellen sich daher auf der Karte als transcendente Linien dar.

7. Wie man sieht, ist diese Projektion im Grunde nichts weiter als eine quadratische Plattkarte, nur dass der Aequator durch den ersten Meridian ersetzt ist. Man darf daher diese Darstellungsweise, will man nicht in grobe Fehler verfallen, nur auf eine verhältnissmässig schmale Zone zu beiden Seiten des ersten Meridians beschränken.

Setzen wir ausserdem noch voraus, dass auch in der Richtung des ersten Meridianes die Karte nur eine geringe Ausdehnung besitzt, so nehmen die vorstehenden Gleichungen eine etwas einfachere Gestalt an.

In den Formeln (2) und (4) ist der Erdhalbmesser $= 1$ gesetzt worden; setzen wir ihn $= a$, so müssen wir $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{a}$ an die Stelle von x und y in diese Formeln einsetzen. Unter der Annahme, dass sowohl x als $\varphi - \varphi_0$ sehr klein sind, werden aber auch $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{a}$ sehr kleine Brüche sein, und man kann dann in den vorstehenden Formeln

statt	$\sin x$	$\cos x$	$\tan y$
schreiben	$\frac{x}{a}$	$1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}$	$\frac{y}{a}$.

Setzt man diese Werthe ein, so ergeben sich nach einigen einfachen Entwickelungen, bei denen höhere Potenzen von $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{a}$ als die zweite vernachlässigt werden, anstatt (3) und (4) die beiden Formeln

$$(3a) \quad (y - a \cot\varphi_0)^2 + x^2 = a^2 \cot\varphi_0\,[\cot\varphi_0 + 4 \sin \tfrac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)].$$

(4a) $(y + a \tan \varphi_0)^2 + 2a \sec \varphi_0 \cot \lambda \cdot x = a^2 (2 + \tan^2 \varphi_0)$.

Man sieht daraus, dass man für kleine x und y die Abbildungen der Parallelkreise als kreisförmig, die der Meridiane als Parabelbögen ansehen darf.

III. Lambert's isocylindrische Transversal-Projektion.

8. Dieselbe bildet das Seitenstück zu der unter III. des vor. §. behandelten Lambert'schen Projektion, nur dass an die Stelle des Aequators der erste Meridian tritt.

Rechnen wir die y und x vom Durchschnittspunkte der beiden Geraden an, die den ersten Meridian und den Aequator darstellen, so ist (zufolge III. des vor. §.)

$$y = \lambda_1 \text{ und } x = \sin \varphi_1,$$

wenn der Radius a der Kugel als Einheit genommen wird. Mittelst der Gleichungen (1) erhält man sonach

(8) $$\cot y = \cos \lambda \cot \varphi \text{ und } x = \cos \varphi \sin \lambda.$$

In den beiden nachstehenden Tabellen sind die diesen Formeln entsprechenden Werthe von x und y angegeben.

Werthe von $x = \cos\varphi \sin\lambda$.

Breite φ	Länge λ.									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0	0,1737	0,3420	0,5000	0,6428	0,7660	0,8660	0,9397	0,9848	1,0000
10	0	0,1710	0,3368	0,4924	0,6330	0,7544	0,8529	0,9254	0,9699	0,9848
20	0	0,1632	0,3214	0,4699	0,6040	0,7199	0,8138	0,8830	0,9254	0,9397
30	0	0,1504	0,2962	0,4330	0,5567	0,6634	0,7500	0,8138	0,8529	0,8660
40	0	0,1330	0,2614	0,3830	0,4924	0,5868	0,6634	0,7199	0,7544	0,7660
50	0	0,1116	0,2199	0,3214	0,4132	0,4924	0,5567	0,6040	0,6330	0,6428
60	0	0,0868	0,1710	0,2500	0,3214	0,3830	0,4390	0,4699	0,4924	0,5000
70	0	0,0594	0,1170	0,1710	0,2199	0,2614	0,2962	0,3214	0,3368	0,3420
80	0	0,0302	0,0594	0,0868	0,1116	0,1330	0,1504	0,1632	0,1710	0,1737
90	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Werthe von $y = \text{Arc}\cot(\cot\varphi \cos\lambda)$.

Breite φ	Länge λ.									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
10	0,1746	0,1772	0,1854	0,2009	0,2262	0,2763	0,3390	0,4860	0,7931	1,5708
20	0,3491	0,3540	0,3695	0,3978	0,4436	0,5152	0,6292	0,8165	1,1010	1,5708
30	0,5236	0,5303	0,5509	0,5880	0,6459	0,7318	0,8571	1,0360	1,2746	1,5708
40	0,6981	0,7057	0,7289	0,7696	0,8309	0,9170	1,0336	1,1818	1,3670	1,5708
50	0,8727	1,8802	0,9031	0,4924	0,9995	1,0762	1,1737	1,2913	1,4261	1,5708
60	1,0472	1,0538	1,0737	1,1071	1,1669	1,2135	1,2898	1,3758	1,4709	1,5708
70	1,2217	1,2264	1,2413	1,2655	1,2989	1,3410	1,3908	1,4470	1,5036	1,5708
80	1,3963	1,3989	1,4065	1,4193	1,4367	1,4579	1,4854	1,5106	1,5402	1,5708
90	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708

Mittelst der in dieser Tafel angegebenen Werthe von x und y lässt sich das Netz auf **Taf. III, Fig. XVI** zeichnen.

9. Aus den Gleichungen (8) erhält man durch Elimination von φ, beziehentlich von λ die Gleichungen der Abbildungen

des Meridianes von der Länge λ

$$x^2 (1 + \cos^2\lambda \tan^2 y) = \sin^2\lambda \tag{9}$$

und des Parallelkreises von der Breite φ

$$\tan^2 y (\cos^2\varphi - x^2) = \sin^2\varphi. \tag{10}$$

Beide Kurven sind hiernach transcendent. Man erkennt aber aus den beiden Gleichungen, dass beide Kurven symmetrisch sind zur x- wie zur y-Achse; man kann also die vier Punkte, welche die gleiche südliche oder nördliche Breite und dieselbe östliche oder westliche Länge besitzen, auf einmal zeichnen. Der Meridian von $\pm 90^0$ stellt sich ferner in Form zweier zum Aequator parallelen Geraden dar, welche die Parallelkreise und die Meridiane symmetrisch theilen. Wenn man die ganze Erdoberfläche darstellt, wie unser Netz, **Fig. XVI**, es thut, so erscheint die Abbildung in vier immer paarweise symmetrische Figuren getheilt; die oberste und unterste Begrenzungslinie bildet wieder der Aequator. Der Mittelmeridian (erste Meridian) wird durch die Parallelkreise in gleiche Abschnitte getheilt; ausserdem erkennt man aus der Vergleichung der obersten Horizonial- und der letzten Vertikalreihe in der Tabelle für x, dass der Meridian von 90^0 in derselben Weise wie der Aequator getheilt wird. Die Aequatorgrade nehmen von der Mitte aus bis zu 90^0 Länge ab; an der ersteren Stelle sind sie den Breitengraden gleich, bei 90^0 Länge dagegen Null.

10. Aus dem vorigen Paragraphen wissen wir, dass diese Darstellungsweise aequivalente oder flächengleiche Abbildungen giebt.

Wir haben dort auch gesehen, wie die Winkel geändert wereen. Ist ψ der Winkel, den eine gewisse Richtung mit dem durch die beiden Aequatorpunkte B und B_1 und durch den Punkt mit den sphärischen Koordinaten φ_1 und λ_1 gehenden grössten Kreise einschliesst, so ist die Abbildung ψ' dieses Winkels durch die Gleichung bestimmt

$$\tan \psi' = \sec^2\varphi_1 \cdot \tan \psi$$

[vergl. Nr. 13 des vorigen §., Gleich. (12)].

Man sieht hieraus, dass nur für $\varphi_1 = 0$ die Winkel ψ und ψ' einander gleich sind; also längs des ersten Meridianes werden die Winkel nicht geändert.

Für jeden andern Werth von φ_1 ist ψ' grösser als ψ und zwar ist die Differenz $\psi' - \psi$ am grössten, wenn

$$\tan \psi = \pm \cos \varphi_1, \quad \tan \psi' = \pm \sec \varphi_1$$

ist. Ausserdem giebt es zu jeder Richtung ψ eine konjugirte υ, so dass $\psi - \upsilon = \psi' - \upsilon'$ ist, und zwar ist

$$\tan \psi \tan \upsilon = \sec^2\varphi_1.$$

11. Aus dem, was über die Aenderung der Winkel gesagt worden, ergiebt sich, dass die Darstellungsweise vorzugsweise in der Nähe des ersten Meridianes brauchbar ist. Sie eignet sich also

namentlich zur Abbildung von Ländern, die eine grosse Ausdehnung in der Richtung von Süd nach Nord besitzen und nur eine relativ geringe von Ost nach West, wie dieses beispielsweise mit den amerikanischen Kontinenten der Fall ist. Für diesen Fall ist sie auch von ihrem Urheber, Lambert, empfohlen worden. Zur Darstellung einer ganzen Halbkugel oder auch nur eines Stückes der Erdoberfläche, das sich auf 60° etwa zu jeder Seite des Mittelmeridianes erstreckt, würde sie sich wegen der bedeutenden Verzerrungen, die sich dann nach dem Rande hin geltend machen, nicht mehr eignen.

IV. Lambert's konforme Cylinderprojektion.

12. Es ist dies Nichts weiter, als die Projektion Mercators, angewandt auf die Koordinaten φ_1 und λ_1 anstatt φ und λ. Hiernach ist, wenn man den Kugelhalbmesser $a = 1$ setzt

$$y = \lambda_1, \quad x = l \tan\left(\frac{\pi}{4} + \varphi_1\right) = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1 + \sin\varphi_1}{1 - \sin\varphi_1},$$

und wenn man auf diese Gleichungen die Transformationsformeln (1) anwendet, so erhält man sofort die beiden Gleichungen

$$\text{(11)} \qquad \cot y = \cos\lambda \cot\varphi, \quad x = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1 + \cos\varphi \sin\lambda}{1 - \cos\varphi \sin\lambda}.$$

Die folgenden beiden Tafeln geben uns die Werthe von x und y, welche verschiedenen Längen und Breiten entsprechen.

Werthe von $x = \frac{1}{2} l \frac{1 + \cos \varphi \sin \lambda}{1 - \cos \varphi \sin \lambda}$

Breite φ	Länge λ.									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0	0,1754	0,3564	0,5493	0,7629	1,0107	1,3169	1,7354	2,4362	∞
10	0	0,1727	0,3505	0,5393	0,7464	0,9831	1,2689	1,6255	2,0893	2,4362
20	0	0,1647	0,3332	0,5099	0,6995	0,9073	1,1382	1,3894	1,6255	1,7354
30	0	0,1515	0,3053	0,4636	0,6281	0,7989	0,9730	1,1382	1,2689	1,3169
40	0	0,1338	0,2683	0,4036	0,5392	0,6728	0,7989	0,9073	0,9831	1,0107
50	0	0,1121	0,2236	0,3370	0,4394	0,5392	0,6281	0,6995	0,7464	0,7629
60	0	0,0870	0,1727	0,2554	0,3370	0,4036	0,4636	0,5099	0,5393	0,5493
70	0	0,0595	0,1175	0,1727	0,2236	0,2683	0,3053	0,3332	0,3505	0,3564
80	0	0,0302	0,0595	0,0870	0,1121	0,1338	0,1515	0,1647	0,1727	0,1754
90	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Werthe von $y = \text{Arc cot} (\cos \lambda \cot \varphi)$.

Breite φ	Länge λ.									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
10	0,1745	0,1772	0,1854	0,2009	0,2262	0,2763	0,3390	0,4860	0,7930	1,5708
20	0,3491	0,3540	0,3695	0,3978	0,4436	0,5152	0,6292	0,8165	1,1010	1,5708
30	0,5236	0,5303	0,5509	0,5888	0,6459	0,7318	0,8571	1,0360	1,2746	1,5708
40	0,6982	0,7057	0,7289	0,7696	0,8309	0,9170	1,0336	1,1838	1,3670	1,5708
50	0,8727	1,8802	0,9031	0,9434	0,9995	1,0762	1,1737	1,2913	1,4261	1,5708
60	1,0472	1,0538	1,0737	1,1071	1,1669	1,2135	1,2898	1,3758	1,4709	1,5708
70	1,2217	1,2265	1,2413	1,2655	1,2989	1,3410	1,3908	1,4470	1,5036	1,5708
80	1,3962	1,3989	1,4065	1,4192	1,4367	1,4579	1,4654	1,5106	1,5402	1,5708
90	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708	1,5708

13. Die Abbildung, welche eine derartige Karte giebt, ist, wie bei Mercator's Projektion, konform; es wird also die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilchen gewahrt. Die Linearvergrösserung in einem Punkte mit der Koordinate φ_1 ist (zufolge Nr. 15 des vorigen §.)

$$\varkappa = \frac{1}{\cos \varphi_1},$$

d. i. zufolge der Gleich. (1) dieses Paragraphen

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi \sin^2\lambda}}.$$

Für kleine Werthe von λ ist dieser Werth nicht zu sehr von der Einheit verschieden, mit wachsenden Werthen von λ aber nimmt er rasch zu und ist bei $\lambda = 90^0$ gleich sec φ.

Diese Projektion eignet sich daher, wie die vorige, vorzugsweise zur Darstellung grosser, in der Richtung von Nord nach Süd sich erstreckender Gebiete der Erdoberfläche, die aber nur eine relativ geringe Ausdehnung von Ost nach West besitzen. Den Hauptvorzug der Mercator's-Projektion, dass die Loxodrome als gerade Linie erscheint, besitzt diese Lambert'sche Darstellungsweise nicht, sie entspricht daher nicht den Bedürfnissen der Seefahrer; dagegen giebt sie die Polarregionen in ganz brauchbarer Weise wieder.

Die **Fig. XVII** zeigt uns das Gradnetz, auf Grund vorstehender Tabellen mittels der Koordinaten x und y zu konstruiren.

V. Die Cylinderprojektion von I. Wetch.

14. Wenn man einen Cylinder um die Kugel legt, der dieselbe längs des Aequators berührt und vom Mittelpunkte als Projektionscentrum aus die Meridiane und Parallelkreise auf diesen Cylinder projicirt, denselben darauf abwickelt, so erscheinen die Parallelkreise in der Abbildung als parallele Gerade, deren Abstand vom Aequator durch die Gleichung

$$y = \tan \varphi$$

bestimmt ist, wenn der Kugelhalbmesser $a = 1$ gesetzt und mit φ die Breite bezeichnet wird, während der Meridian von der Länge λ durch eine senkrechte Gerade repräsentirt wird, deren Abstand von der Abbildung des ersten Meridianes

$$x = \lambda$$

ist. Diese Abbildungsweise ist weder äquivalent noch konform, sie hat überhaupt keinerlei Vorzüge, ausser der Leichtigkeit ihrer Konstruktion und würde sich nur zur Darstellung einer schmalen Aequatorialzone eignen.

Diese Projektion ist von I. Wetch in Vorschlag gebracht worden mit der Modifikation, dass er die Berührung längs eines Meridianes stattfinden lassen will. Es wird dann

$$x = \tan \varphi_1 \text{ und } y = \lambda_1,$$

mithin zufolge Gleich. (1)

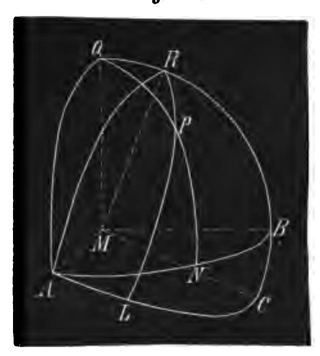
$$(12) \quad x = \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda}}, \quad y = \text{Arc cot} (\cos \lambda \cot \varphi).$$

Wir haben diese Projektion nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

VI. Abbildung einer gegen den Aequator geneigten Zone.

15. Wenn man eine von zwei Parallelkreisen begrenzte Kugelzone darzustellen hat, die aber weder mit dem Aequator, noch mit einem Meridian parallel liegt, so kann man sich einen grössten Kreis denken, der mit der Zone parallel geht, längs desselben einen Cylinder um die Kugel beschreiben und auf diesem Cylinder die Kugel abbilden.

Fig. 52.



In Fig. 52 stelle AB einen Quadranten des Aequators, AQ einen solchen des ersten Meridianes, AC einen Quadranten des grössten Kreises, der mit dem Aequator einen Winkel v einschliesst, AR einen Quadranten des darauf senkrechten grössten Kreises vor. Ein Punkt P kann dann bestimmt werden

entweder durch die Koordinaten

$$AN = \lambda \text{ und } NP = \varphi$$

oder durch die Koordinaten

$$AL = \lambda_1 \text{ und } LP = \varphi_1.$$

In dem sphärischen Dreiecke PQR ist dann

$$PQ = 90^0 - \varphi, \ PR = 90^0 - \varphi_1, \ QR = v,$$
$$\angle PQR = 90^0 - \lambda, \ \angle QRP = 90_0 + \lambda_1$$

und man hat daher den beiden ersten Fundamentalsätzen der sphärischen Trigonometrie (erweiterter Pythagoreischer und Sinus-Satz) zufolge die zwei Formeln

$$(13) \quad \begin{cases} \sin \varphi_1 = \cos v \sin \varphi + \sin v \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos \lambda_1 = \dfrac{\cos \lambda \cos \varphi}{\cos \varphi_1}. \end{cases}$$

Wenn man $v = 90^0$ annimmt, so geht die erste dieser Formeln ohne Weiteres in die erste der Formeln (1) über und aus der andern erhält man nach leichter Transformation die zweite der Gleichungen (1).

Wenn man nun auf dem längs AC umschriebenen Cylinder ein Stück der Kugelfläche abbildet, so erscheint die geradlinige Abwickelung von AC als x-Achse, die darauf senkrechte geradlinige Abbildung von AR als y-Achse und man erhält die rechtwinkligen Koordinaten x und y so wie im vorigen Paragraphen besprochen worden, mittels φ_1 und λ_1 ausgedrückt. Mittels der Gleichungen (13) kann man diese sphärischen Koordinaten durch φ und λ ersetzen.

16. Für die quadratische Plattkarte $x = \lambda_1$, $y = \varphi_1$ erhält man so

$$(14)\quad \begin{cases} \sin y = \cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos x = \dfrac{\cos \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - (\cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda)^2}}, \end{cases}$$

für die äquivalente Projektion Lambert's ist $x = \lambda_1$, $y = \sin \varphi_1$, mithin

$$(15)\quad \begin{cases} y = \cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda \\ \cos x = \dfrac{\cos \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - (\cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda)^2}} \end{cases}$$

und für Mercator's Projektion

$$x = \lambda_1,\ y = \tfrac{1}{2}\, l\, \frac{1 + \sin \varphi_1}{1 - \sin \varphi_1}$$

oder

$$(16)\quad \begin{cases} y = \tfrac{1}{2}\, l\, \dfrac{1 + \cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda}{1 - (\cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda)} \\ \cos x = \dfrac{\cos \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - (\cos \nu \sin \varphi + \sin \nu \cos \varphi \sin \lambda)^2}}. \end{cases}$$

Mittels der aus diesen Formeln berechneten Koordinatenwerthe kann man hinlänglich viele Punkte der Kurven konstruiren, welche die Meridiane und Parallelkreise repräsentiren, und durch gehörige Verbindung dieser Punkte erhält man dann diese Kurve selbst. Freilich bleibt die Berechnung der Koordinaten immer eine sehr umständliche Arbeit, auch wenn man den vorstehenden Formeln durch Einführung von Hilfswinkeln eine für die Rechnung bequemere Gestalt giebt.

§. 15.

Die Kegelprojektion.

I. Allgemeine Bemerkungen.

1. Die Kegelprojektionen sind ganz analog den Cylinderprojektionen: eine bestimmte Zone der Erdkugel, um deren Darstellung es sich handelt, wird ersetzt durch eine Zone auf der Mantelfläche eines normalen Kegels, der entweder die Kugel berührt, oder sie schneidet. Auf die Kegelfläche werden die Kreise, welche sich auf der Erde befinden, nach bestimmten Regeln übertragen, doch immer so, dass die Parallelkreise als parallele Kegelkreise und die Meridiane als gerade Linien, als Erzeugende der Kegelfläche auftreten. Dann wickelt man den Kegelmantel ab, legt ihn in eine Ebene, und nun erscheinen die Parallelkreise als Bögen koncentrischer Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist; die Meridiane aber stellen sich als gerade Linien dar, welche nach diesem Mittelpunkte konvergiren.

2. Abgesehen von der Einfachheit der Konstruktion solcher Karten, haben sie noch die Vortheile,

dass die rechtwinklige Lage der Parallelkreise und Meridiane und ebenso die parallele Lage der Parallelkreise gewahrt bleibt,

und dass gleiche Winkel zwischen Meridianen oder gleiche Unterschiede in der geographischen Länge auch auf der Karte gleich gross, wenn auch nicht in wahrer Grösse, erscheinen.

3. Da übrigens die Parallelkreise auf dem Kegel an Grösse abnehmen, wenn man sich der Spitze nähert, ähnlich wie dieselben auch auf der Kugel mit der Annäherung an den Pol kleiner werden, so ist von Haus aus einleuchtend, dass man bei der Kegelprojektion mehr Mittel zur möglichst genauen Darstellung in der Hand hat, als bei der Cylinderprojektion.

II. Die Abwickelung des Tangentialkegels.

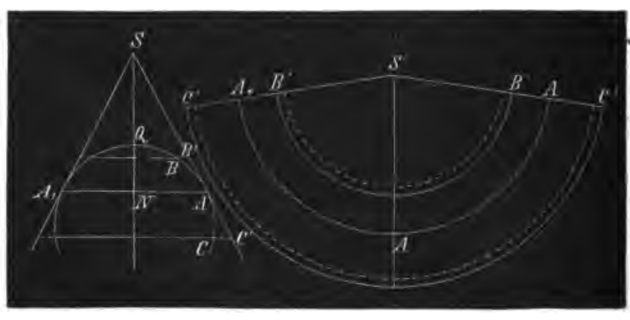
4. Man nimmt einen normalen Kreiskegel an, welcher die Kugel längs des Mittelmeridianes der abzubildenden Zone berührt; dann verlängert man die Ebene der Parallelkreise und Meridiane bis zum Durchschnitt mit der Mantelfläche des Kegels und wickelt zuletzt die letztere ab.

Fig. 53 zeigt hinlänglich deutlich dieses Verfahren und sein Ergebniss. AA_1 bedeutet in dem linken Theile der Figur den Durchmesser des mittleren Parallelkreises von der Breite φ_1, AS und A_1S sind die beiden Erzeugenden des Berührungskegels, welche in der Ebene des Meridianes AQA_1 liegen. Der mittlere Parallelkreis, der in seiner wahren Ausdehnung in der Abwickelung erscheint, ist mit dem Halbmesser

$$AS = a \cot \varphi_1 \tag{1}$$

beschrieben. Der Winkel am Centrum S des Sektors, den die Abwickelung der Mantelfläche bildet, ist (vergl. die Fig. links)

Fig. 53.



$$360^0 \cdot \frac{AN}{AS} = 360^0 \sin \varphi_1.$$

Wenn also zwei Meridiane auf der Kugel den Winkel λ einschliessen, so bilden die beiden Halbmesser der Abwickelung, die ihnen entsprechen, einen Winkel

$$(2) \qquad \lambda \cdot \sin \varphi_1$$

miteinander. Die Abbildungen der Parallelkreise sind übrigens mit Ausnahme des mittleren, sämmtlich grösser als die Originale auf der Kugel, was schon daraus folgt, dass die Kugel innerhalb des Kegels liegt, und auch die Abschnitte, welche die Parallelkreise auf den Meridianen bilden, werden in der Karte unrichtig angegeben.

5. Dem letzteren Uebelstande begegnet man indessen durch eine einfache Modifikation der Konstruktion.

Man trägt nämlich auf einem der Meridiane, z. B. auf dem mittelsten von A aus nach Süd und Nord die wahren Längen der Meridianbögen ab und legt dann durch die so erhaltenen Punkte Kreisbögen, deren Mittelpunkt S ist. Diese letzteren, in der **Fig. 53** rechts punktirt dargestellt, sind dann die Abbildungen der Parallelkreise, während die Meridiane ungeändert bleiben.

Damit wird gleichzeitig auch dem anderen Uebelstande, dass nämlich die Parallelkreise zu lang werden, bis zu einem gewissen Grade abgeholfen.

Der Radius, mit welchem die Abbildung des Parallelkreises von der Breite φ konstruirt wird, beträgt jetzt

$$(3) \qquad \varrho = a\,[\cot \varphi_1 - (\varphi - \varphi_1)]$$

und die lineare Ausdehnung dieses Kreisbogens ist

$$(4) \qquad u' = 2\,\varrho\pi \sin \varphi_1 = 2\,a\pi\,[\cos \varphi_1 - (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1].$$

Da nun der Umfang des Parallelkreises auf der Kugel

$$u = 2\,a\pi \cos \varphi$$

ist, so hat der Unterschied $u' - u$ den Werth

$$(5) \qquad u' - u = 2\,a\pi\,[\cos \varphi_1 - \cos \varphi - (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1].$$

In diesen Formeln hat man, wenigstens in der Differenz $\varphi - \varphi_1$, die Grösse φ und φ_1 nicht nach Graden, sondern in Bogenmaass ausgedrückt zu denken, d. h. es bedeutet φ denjenigen Bogen eines Kreises vom Halbmesser 1, dessen Centriwinkel $360^0 \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$ Grad misst. Ist ein Winkel, etwa φ in Graden angegeben, so findet man seine Grösse in Bogenmaass, wenn man die Anzahl seiner Grade mit 0,01745329 multiplicirt.

Da nun $\cos \varphi_1 - \cos \varphi$ nichts weiter bedeutet, als die senkrechte Projektion des Bogens $\varphi - \varphi_1$ auf den Radius, von welchem aus man die Centriwinkel und die Bogen zählt, und da das Bogenelement im Anfange von $\varphi - \varphi_1$ mit jenem Radius den Winkel $90^0 - \varphi_1$, am Ende aber den Winkel $90^0 - \varphi$ einschliesst, so liegt der absolute Werth der Differenz $\cos \varphi_1 - \cos \varphi$ zwischen den Grenzen

$$(6) \qquad (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi \text{ und } (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1,$$

wo bei der Differenz $\varphi - \varphi_1$ ebenfalls der absolute Werth in Betracht kommt.

Ist nun φ grösser, als φ_1, so sind beide Differenzen

$$(7) \qquad \cos \varphi_1 - \cos \varphi \text{ und } \varphi - \varphi_1$$

positiv und von den beiden Grenzen (6) ist $(\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1$ die kleinere, also

$$\cos \varphi_1 - \cos \varphi > (\varphi - \varphi_1) \sin \varphi_1$$

und mithin die Differenz $u' - u$ positiv.

Ist dagegen φ kleiner als φ_1, so sind die beiden Differenzen (7) beide negativ, und da φ_1 der grössere Winkel ist, so ist

$$(\varphi_1 - \varphi) \sin \varphi_1$$

die obere der beiden Grenzen, zwischen denen $\cos \varphi - \cos \varphi_1$ liegt; mithin ist

$$\cos \varphi - \cos \varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi) \sin \varphi_1$$

negativ, und also die Differenz $u' - u$ auch in diesem Falle positiv.

Man sieht also, dass die Abbildung eines Parallelkreises im Allgemeinen immer grösser ist, als dieser selbst, dass also die Karte in Richtung der geographischen Länge stets die Dimensionen relativ vergrössert. Nur auf dem mittleren Parallelkreise werden die Längengrade in dem richtigen Verhältnisse zu den Breitengraden dargestellt; hier werden daher auch die richtigen Werthe der Winkel gewahrt.

Daraus ergiebt sich, dass man derartige Karten, will man nicht zu grosse Fehler erhalten, auf eine schmale Zone einschränken muss, die den Mittelparallelkreis enthält.

6. Bei dieser Darstellungsweise lässt sich übrigens der Abplattung der Erde in sehr einfacher Weise Rechnung tragen. Zufolge S. 42 hat nämlich der Halbmesser NA des mittleren Parallelkreises (**Fig. 53**) den Werth

$$r_1 = \frac{a \cos \varphi_1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1}}$$

und mithin ist der Halbmesser des Kreisbogens, welcher in der Abwickelung den mittleren Parallelkreis darstellt,

$$(8) \qquad SA = r_1 \operatorname{cosec} \varphi_1 = \frac{a \cot \varphi_1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1}}$$

Der Winkel zwischen den beiden äussersten Radien des Sektors, der die Abwickelung des Kegelmantels giebt, hat auch hier den Werth

$$360^0 \cdot \sin \varphi_1,$$

und die Abbildungen der verschiedenen Parallelkreise findet man nach der im Eingange der Nr. 5 gegebenen Regel, nur muss man diejenigen Bogenlängen abtragen, welche der elliptischen Form der Meridiane zukommen.

7. Als Erfinder der konischen Projektion gilt Claudius Ptolemäus, weil derselbe im 24. Kapitel des ersten Buches seiner Geographie ein Verfahren zur Abbildung der damals bekannten Welt angiebt, was als Abwickelung eines Kegels betrachtet werden kann, der die Erde längs des Parallels von Rhodus (36° nördl. Breite) berührt.

Wird nämlich die Länge eines Meridiangrades als Einheit genommen, so erscheint nach der Konstruktion des Ptolemäus der Parallel von 36° als ein Kreisbogen, dessen Halbmesser 79 Ein-

heiten zählt. Nun ist aber, wenn ein Meridiangrad gleich Eins gesetzt wird, der Halbmesser $a = \frac{360}{2\pi} = 57{,}30$, und weiter $79 = 1{,}3788 \cdot 57{,}30 = 1{,}3788 \cdot a$; da aber $\cot 36^0 = 1{,}3764$ ist, so ist der Halbmesser der Parallelkreis-Abbildung nahezu gleich $a \cot 36^0$, entsprechend unserer Formel (1).

Die Meridiangrade trägt Ptolemäus alle von gleicher Länge, als Einheiten auf, und zwar trägt er von dem Parallel von Rhodus aus 36 Theile nach Süden ab, um den Aequator zu erhalten, und 63 — 36 oder 27 Theile nach Norden, um den Parallel von Thule (63^0 nördl. Br.) zu bekommen; diese Kreise erscheinen daher als Bogen, deren Halbmesser $79 + 36 = 115$ und $79 - 27 = 52$ Einheiten haben.

Ferner trägt Ptolemäus auf dem Parallel von 36^0 auf jeder Seite des mittleren Meridianes 18 Bogen von der Länge 4 ab, deren jeder 5 Längengrade darstellt, und vereinigt die so erhaltenen Endpunkte mit dem gemeinsamen Mittelpunkte der Parallelen. Mit andern Worten, er giebt auf dem Parallel von 36^0 jedem Längengrade die Grösse $\frac{4}{5}$, was nahezu mit $0{,}8192 = \cos 36^0$ übereinstimmt, als derjenigen Länge, die ein solcher Grad wirklich hat.

Durch diese Konstruktion bekommen die Längengrade des Parallels von Thule und des Aequators das Verhältniss $52 : 115$ oder $0{,}4522 : 1$, während dieses Verhältniss in Wirklichkeit $\cos 63^0 : 1$ oder $0{,}4540 : 1$ ist, was nicht erheblich von dem vorigen abweicht. Doch sind die Grade sowohl auf dem Parallel von Thule als auf dem Aequator zu gross im Vergleich zu den Meridiangraden; auf dem Aequator z. B. ist ein Grad $= \frac{4}{5} \cdot \frac{115}{79} = 1{,}1646$, anstatt dass er der Einheit gleich sein sollte.

Auf diese Weise erfüllt Ptolemäus, wenn auch nicht in aller Strenge, die beiden Forderungen, die er an die Karte stellt: dass nämlich 1) die einzelnen Längengrade des Parallels von Rhodus in dem richtigen Verhältnisse zur Grösse der Meridiangrade dargestellt werden, und dass 2) die Grade auf dem äussersten Parallel, dem von Thule, zu denen des Aequators in dem richtigen Verhältnisse stehen.

III. Die Kegelprojektion von Mercator.

8. Wenn es sich um die Abbildung einer schmalen Zone handelt, so liegt es nahe, dieselbe auf den Kegel zu übertragen, der durch die beiden äussersten Parallelkreise dieser Zone geht. Wickelt man dann diesen Kegel ab, so erscheinen die Längengrade auf den beiden begrenzenden Parallelkreisen der Zone in ihrer wahren Grösse, die dazwischen liegenden Parallelen aber sind alle verkleinert.

Sind φ' und φ'' die Breiten der begrenzenden Praralellkreise, A und B die Punkte, in denen sie den ersten Meridian schneiden und ist S die Spitze des Kegels (**Fig. 54**), so ist der Winkel zwischen SA und der Verlängerung der Achse $Q_1 Q = \frac{1}{2}$ (Bog. $Q_1 A$ — Bog. BQ) $= \frac{1}{2} (\varphi' + \varphi'')$, und da

Fig. 54.



$$SA \sin \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') = a \cos \varphi' \text{ und}$$
$$SB \sin \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') = a \cos \varphi''$$

ist, so hat man zur Ermittelung der Halbmesser SA und SB der beiden Parallelkreise die Gleichungen

$$SA = \frac{a \cos \varphi'}{\sin \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')} \text{ und}$$
$$SB = \frac{a \cos \varphi''}{\sin \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')}.$$

9. Man hat aber diese Art der Kegelprojektion, die Uebertragung der Erdoberfläche auf einen eingeschriebenen Kreiskegel und Abwickelung der Mantelfläche desselben in eine Ebene, auch zur Darstellung grösserer Stücke der Erdoberfläche, die zwischen weit entfernten Parallelen liegen, benutzt. Durch eine passende Wahl der beiden Parallelkreise, längs deren dieser Kegel die Kugel schneidet und die daher in der Abwickelung in ihrer wahren Grösse erscheinen, kann man dabei bewirken, dass die Fehler, welche an den Rändern der Karte und gegen die Mitte derselben stattfinden, gewissen Bedingungen genügen. Der Erste, welcher hierauf aufmerksam gemacht hat, ist der berühmte Geograph Gerhard Mercator, den wir schon als Erfinder der nach ihm benannten Seekarten kennen gelernt haben. Bei der grossen Karten von Europa, welche derselbe im Jahre 1554 veröffentlichte, sind die Längengrade auf den Parallelen von 40° und 60° Breite im richtigen Verhältnisse zu den Meridiangraden dargestellt, während sie auf den dazwischen liegenden Parallelen verkleinert, auf den südlich oder nördlich darüber hinaus liegenden aber vergrössert sind.

Ungefähr zwei Jahrhunderte später hat der Franzose Jos. Niclas de l'Isle, erster Astronom der Petersburger Akademie, dieselbe Projektionsmanier wieder in Anwendung gebracht, daher sie auch öfters mit seinem Namen bezeichnet wird. Auf der von demselben im Jahre 1745 publicirten grossen Karte von Russland, die sich vom Parallel von 40° Breite bis zu dem von 70° erstreckt, sind nämlich auf den Parallelen von $47\tfrac{1}{2}$ Grad und $62\tfrac{1}{2}$ Grad Breite die Längengrade in ihrem wahren Verhältnisse zu den Meridiangraden abgetragen und die Meridiane, auf denen alle Grade von gleicher Länge sind, erscheinen in Form konvergirender gerader Linien.

10. Diese Arbeit von de l'Isle hat dem grossen Mathematiker Leonhard Euler Anlass gegeben, zu untersuchen, welche Kegelprojektion man wählen muss, wenn die Vergrösserungen auf den äussersten Parallelkreisen einander gleich sein und auch übereinstimmen sollen, nur im entgegengesetzten Sinne, mit dem extremen Werthe der Verkleinerung gegen die Mitte der Karte hin.

Wir geben hier die Hauptgedanken dieser Euler'schen Arbeit, die im Jahre 1778 veröffentlicht wurde (*De projectione geogra-*

phica de l'Isliana in mappa generali Imperii Russici usitata. — Acta Acad. Petrop. pro anno MDCCLVII, p. 143 ff.).

Es sei φ' die Breite des südlichsten, φ'' diejenige des nördlichsten Parallelkreises; als Längeneinheit wollen wir betrachten die Ausdehnung eines Meridiangrades. Es mag nun in **Fig. 55** $AB = a\ (\varphi'' - \varphi')$ das Stück des ersten Meridianes sein, welches in Form einer geraden Linie zwischen den Abbildungen der beiden extremen Parallelkreise liegt; AA' und BB' mögen die Abbildungen von Bögen von je 1° auf diesen Parallelkreisen sein. Die beiden Geraden AB und $A'B'$ schneiden sich in einem Punkte O, dem gemeinschaftlichen Centrum der Kreisbögen, welche die Parallelkreise repräsentiren sollen. Bezeichnet man OB mit x und den zwischen OA und OA' um O mit Halbmesser 1 beschriebenen Bogen mit ω, so ist

Fig. 55



$$AA' = (x + \varphi'' - \varphi')\ \omega \text{ und } BB' = x\,\omega.$$

Da nun die wahre Grösse eines Längengrades auf den Parallelen von der Breite φ' und φ'' durch

$$\cos \varphi' \text{ und } \cos \varphi''$$

ausgedrückt wird, wenn der Meridian- oder Aequatorgrad die Einheit bildet, so sind die Fehler, welche auf den genannten Parallelen auf der Karte begangen werden, gleich

$$(x + \varphi'' - \varphi')\ \omega - \cos \varphi' \text{ und } x\omega - \cos \varphi''.$$

Nach der ersten von Euler gestellten Forderung sollen aber beide Fehler gleich gross sein; das giebt die Gleichung

$$(x + \varphi'' - \varphi')\ \omega - \cos \varphi' = x\omega - \cos \varphi'',$$

aus welcher sich ergiebt

$$\omega = \frac{\cos \varphi' - \cos \varphi''}{\varphi'' - \varphi'}. \tag{9}$$

In dieser Formel sind φ'' und φ' im Nenner in Graden ausgedrückt, ω aber erhält man in Bogenmaass; will man es statt dessen in Graden haben, so hat man noch mit 57°, 2959 (57° 17′ 44″, 8) zu multipliciren, als der Grösse des Centriwinkels, dessen Bogen dem Halbmesser gleich ist.

Das Bemerkenswerthe an der Formel (8) ist der Umstand, dass die Grösse ω nicht abhängt von der Wahl der Parallelkreise, auf deren Abbildungen die Längengrade im richtigen Verhältnisse zu den Meridiangraden stehen.

Ist nun weiter CC' die Abbildung eines Längengrades von der Breite φ, also $CB = \varphi'' - \varphi$, so ist

$$CC' = (x + \varphi'' - \varphi)\ \omega$$

und da die wahre Länge eines solchen Längengrades gleich $\cos \varphi$ ist, so hat der Fehler, den man begeht, den Werth

$$\delta = (x + \varphi'' - \varphi)\ \omega - \cos \varphi.$$

Für einen nur wenig grösseren Werth φ_1 hat man die entsprechende Formel

$$\delta_1 = (x + \varphi'' - \varphi_1)\,\omega - \cos\varphi_1,$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\delta_1 - \delta}{\varphi_1 - \varphi} = -\,\omega - \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi}{\varphi_1 - \varphi},$$

in welcher Gleichung $\varphi_1 - \varphi$ in Bogenmaass zu verstehen ist. Lässt man die Differenz $\varphi_1 - \varphi$ in Null übergehen, so wird

$$\frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi}{\varphi_1 - \varphi} = -\frac{\sin\frac{\varphi_1 + \varphi}{2}\cdot\sin\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}}{\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}} = -\sin\varphi$$

und es geht daher vorstehende Gleichung über in

$$\frac{\delta_1 - \delta}{\varphi_1 - \varphi} = -\,\omega + \sin\varphi,\ \varphi_1 - \varphi = 0.$$

So lange $\sin\varphi$ kleiner ist als ω ist die rechte Seite dieser Gleichung negativ, und es ist daher δ_1 kleiner als δ, oder δ nimmt ab; ist aber $\sin\varphi$ grösser als ω, so ist δ_1 grösser als δ, δ nimmt also zu. Den kleinsten Werth von δ erhält man also für den Werth φ_0 von φ, der sich aus der Gleichung

$$\sin\varphi_0 = \omega \tag{10}$$

ergiebt, wo ω in Graden ausgedrückt ist. Nach der weiter oben aufgestellten Gleichung ist dieser Werth

$$\delta_0 = (x + \varphi'' - \varphi_0)\,\omega - \cos\varphi_0.$$

Da bei der Kegelprojektion in der Mitte Verkleinerung eintritt, so ist dieser Werth von δ negativ. Nach der zweiten Euler'schen Forderung soll nun der positiv gerechnete Werth dieser Aenderung gleich der Vergrösserung auf einem der äussersten Parallelkreise sein. Dies giebt die Gleichung

$$\cos\varphi_0 - (x + \varphi'' - \varphi_0)\,\omega = x\omega - \cos\varphi'',$$

aus der man

$$x = \frac{\cos\varphi_0 + \cos\varphi''}{2\,\omega} - \tfrac{1}{2}(\varphi'' - \varphi_0) \tag{11}$$

erhält. Bedeutet ferner Q in **Fig. 54** den Pol, ist also $BQ = 90^\circ - \varphi''$, so ist der Abstand z des Poles Q vom Mittelpunkte O durch die Gleichung

$$z = x - (90^\circ - \varphi'') \tag{12}$$

gegeben.

11. Die Gleichungen (9), (10) und (11) oder (12) geben uns alle zur eigentllichen Konstruktion der Karte nöthigen Elemente.

Ist $\varphi' = 40^\circ$ und $\varphi'' = 70^\circ$, so ist zufolge Gleichung (9)

$$\omega = \frac{0{,}76604 - 0{,}34202}{30} = 0{,}014134$$

in Bogenmaass, oder in Gradmaass $= 0{,}014134 \cdot 57^\circ{,}2959 = 0^\circ{,}80982$ oder

$$\omega = 48' \, 35''.$$

Der Winkel φ_0, für welchen die Verkleinerung am bedeutendsten ist, ergiebt sich aus der Gleichung (10) oder

$$\sin \varphi_0 = 0{,}80982;$$

man findet $\varphi_0 = 54^\circ \, 4' \, 40''$. Man sieht, dass dieser Werth ungefähr mit der Breite des mittleren Parallels, 55°, zusammenfällt.

Berechnet man mittels der Formel (11) den Werth x, indem man $\omega = 0{,}014134$ setzt, so ergiebt sich

$$x = \frac{0{,}58669 + 0{,}34202}{2 \cdot 0{,}014134} = \tfrac{1}{2}\,(70 - 54{,}0777) = 32{,}8538 - 7{,}9611$$

d. i. $$x = 24^\circ,\, 8927,$$

und hieraus folgt schliesslich nach Gleich. (12)

$$z = 4^\circ,\, 8927 = 4^\circ \, 53' \, 34''.$$

Die Grösse eines Längengrades ist hierbei

auf dem Parallel von $\varphi' = 40^\circ$

$$(x + \varphi'' - \varphi')\,\omega = 54{,}8927 \cdot 0{,}014134 = 0{,}77586,$$

und auf dem Parallel von $\varphi'' = 70^\circ$

$$x\,\omega = 24{,}8927 \cdot 0{,}014134 = 0{,}35184;$$

da nun die Längengrade auf der Erde die Grösse von

0,76604 und beziehentlich 0,34202

besitzen, so beträgt der Unterschied zwischen der Abbildung und der wahren Grösse auf jedem der äussersten Meridiane 0,00982, oder es sind die Längengrade auf dem Parallel von 70° um ungefähr $\frac{1}{78}$, auf dem von 40° aber um ungefähr $\frac{1}{36}$ ihres wahren Werthes vergrössert Da in der Breite φ_0 dieselbe Aenderung eintritt, wie in den Breiten φ' und φ'' nur im entgegengesetzten Sinne, als Verkleinerung, und da $\cos \varphi_0 = 0{,}58669$ ist, so findet dort eine Verkleinerung des wahren Werthes des Längengrades um etwa $\frac{1}{59}$ statt.

12. Statt des obigen Werthes von z kann man ohne allzugrosse Abweichung von den von Euler ausgesprochenen Forderungen auch 5° abnehmen, und unter dieser Voraussetzung ist das Netz auf **Taf. III** in **Fig. XVIII** gezeichnet, welches 180 Längengrade vom Nordpol bis 10° südl. Breite umfasst. Da alle Parallelkreise von demselben Centrum aus beschrieben werden, die Meridiangrade unter sich und ebenso auf jedem Parallel die Längengrade gleich sind, so kann man die Karte leicht weiter fortsetzen. Geht man indessen aus der Zone zwischen 70° und 40° n. Br. heraus, so nehmen die Vergrösserungen beträchtlich zu; z. B. ein Grad des Aequators bekommt die Länge 1,34122, statt der Länge 1, ist also um mehr als den dritten Theil seines wahren Werthes zu gross.

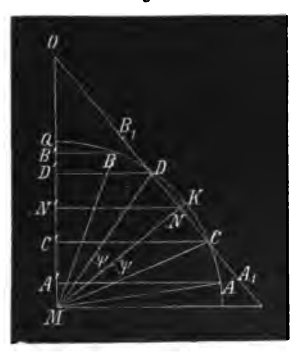
IV. Murdoch's Kegelprojektionen.

13. Der englische Mathematiker Patrick Murdoch (gest. 1774) hat in den *Philosophical Transactions for the year 1758* verschiedene Vorschläge zur Konstruktion konischer Erdkarten gemacht, die hier der Vollständigkeit halber Erwähnung finden mögen, wenn gleich

sie keine bemerkenswerthen Vorzüge besitzen und in ihrer Brauchbarkeit von anderen übertroffen sind.

Murdoch stellt sich bei den verschiedenen Kartenprojektionen, die er vorschlägt, die Aufgabe, eine gewisse Kugelzone so auf einen die Kugel schneidenden Kegel zu übertragen, dass die Gesammtfläche der Zone auch auf der Karte in ihrer wahren Grösse erscheint. Zur Erreichung dieses Zieles hat er aber verschiedene Mittel vorgeschlagen.

Fig. 56.



14. Erste Murdoch'sche Projektion. In Fig. 56 sei M der Mittelpunkt der Kugel mit dem Radius a, AA' und BB' seien die Halbmesser der beiden Parallelkreise von der Breite φ' und φ'', welche die abzubildende Erdzone begrenzen, der Punkt K, dessen Breite gleich $\frac{1}{2}(\varphi' + \varphi'')$ ist, sei der Mittelpunkt des Bogens AB auf dem Meridiane $ACDBQ$. Ferner soll die Kegelseite den Meridian in den zwei von K gleichweit abstehenden Punkten C und D schneiden, O soll der Scheitel des Kegels sein, KA_1 und KB_1 sind die Abwickelungen der Bögen KA und KB auf die Seite des Kegels.

Bezeichnet man dann noch mit N den Schnittpunkt von MK mit CD und zieht NN' senkrecht zur Achse, so wird die Bedingung, dass die Gesammtfläche in der Abbildung gewahrt bleibe, durch die Gleichung ausgedrückt

$$2\,NN' \cdot \pi \cdot \text{Bog.}\,AB = 2\,a\pi \cdot A'B'.$$

Bezeichnet man nun jeden der gleichen Winkel DMN und NMC mit ψ, so ist

$$NN' = MN \cdot \cos \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'') = a \cos\psi \cos \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi'');$$

andererseits ist aber

$$A'B' = a(\sin\varphi'' - \sin\varphi') = 2\,a \cos\frac{\varphi'' + \varphi'}{2} \sin\frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

und

$$\text{Bog.}\,AB = a(\varphi'' - \varphi').$$

Sonach geht die obige Gleichung über in

$$\cos\psi = \frac{2}{\varphi'' - \varphi'} \cdot \sin\frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

wodurch der Winkel ψ bestimmt ist.

Es ist nunmehr auch möglich, den Halbmesser $ON = r$ zu berechnen, mit welchem der mittlere Parallelkreis auf der Karte beschrieben wird. Es ist nämlich

$$r = MN \tan OMN = MN \cot\frac{\varphi' + \varphi''}{2},$$

oder, wenn man für MN seinen Werth

$$MN = a\cos\psi = \frac{2a}{\varphi'' - \varphi'} \cdot \sin\frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

einsetzt,

$$(13) \qquad r = \frac{2a}{\varphi'' - \varphi'} \cdot \sin\frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cdot \cot\frac{\varphi' + \varphi''}{2}.$$

Wickelt man nun den Kegel, dessen Basis der Kreis vom Halbmesser NN' ist, ab, so erhält man einen Sektor, dessen beide begrenzende Radien einen Winkel von

$$360^0 \cdot \frac{NN'}{NO} = 360^0 \cdot \sin\frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

mit einander einschliessen. Wenn demnach ein Paar Meridiane auf der Kugel den Winkel λ mit einander bilden, so schliessen die beiden ihnen entsprechenden Geraden auf der Karte den Winkel

$$\lambda \sin\frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

miteinander ein.

Die verschiedenen Parallelkreise erhält man nach der gewöhnlichen Methode, wenn man auf dem mittlern Meridiane von dem Punkte N aus, welcher dem Meridianpunkte K entspricht, nach Nord und Süd die richtigen Längen der Meridianbögen aufträgt und von dem Punkte O aus durch die erhaltenen Punkte Kreisbogen schlägt bis zu den beiden begrenzenden Halbmessern (Meridianen).

15. Diese von Murdoch angegebene Konstruktion der Parallelkreise ist ganz konform dem Verfahren, welches bei den andern bisher betrachteten Kegelprojektionen einhalten wird. Aber es entspricht dieselbe nicht der Bedingung, die Murdoch gleichfalls gestellt hat, dass nämlich die beiden Parallelen, längs deren der Kegel die Kugel schneidet, und welche die Breite

$$\frac{\varphi' + \varphi''}{2} \pm \psi$$

haben, in ihrer wahren Grösse abgebildet werden sollen. Dazu ist nöthig, dass die Abbildungen dieser Kreise mit den Radien OC und beziehentlich OD beschrieben werden, oder, was dasselbe ist, mit den Radien

$$r \mp MC = r \mp a \sin\psi.$$

Setzt man für r seinen Werth

$$a \cos\psi \cot\frac{\varphi' + \varphi''}{2},$$

so erhält man für OC und OD die beiden von Joh. Tobias Mayer (dem jüngeren) angegebenen Formeln

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} OC &= a\,\frac{\cos\left(\frac{\varphi' + \varphi''}{2} + \psi\right)}{\sin\frac{\varphi' + \varphi''}{2}} \\ OD &= a\,\frac{\cos\left(\frac{\varphi' + \varphi''}{2} - \psi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi' + \varphi''}{2}\right)}. \end{aligned} \right.$$

Vergl. J. T. Mayer, Gründl. u. vollst. Anweisung zur Verzeichnung der Land-, See- und Himmelskarten etc. Erlangen 1794 (spätere Ausgabe 1804, 1815 und 1828), Kap. III.

Natürlich können, wenn man zur Konstruktion der erwähnten Parallelkreise sich der vorstehenden zwei Formeln bedient, die Meridiangrade nicht alle gleich gross genommen werden; vielmehr werden dieselben in der Mitte kleiner als nach dem Rande hin ausfallen, weil der mittlere Bogen CD durch die gerade Linie CD repräsentirt wird. Will man dies zulassen, so bedarf es dann noch einer besondern Annahme über die Art und Weise, wie die Meridiangrade auf die Karte übertragen werden, einer Annahme, durch welche aber die oben gemachte Voraussetzung, dass A_1B_1 = Bogen AB ist, nicht alterirt werden darf; denn sonst wird die erste der Gleichungen in Nr. 14, aus der sich die Formeln für cos ψ etc. ergeben, ungültig.

Dem gegenüber scheint es am einfachsten, die Meridiangrade, wie Murdoch thut, gleich lang abzutragen und die Abbildung der beiden Parallelkreise in wahrer Grösse fallen zu lassen.

Man kann aber auch umgekehrt die gleiche Länge der Meridiangrade gleichzeitig mit der Bestimmung, dass A_1B_1 = Bogen AB ist, aufgeben und dafür das bei Murdoch's zweiter Methode angewandte Verfahren benutzen.

16. Zweite Murdoch'sche Projektion. Die einzelnen Punkte eines Meridianes werden derart auf die in dessen Ebene liegende Kegelseite übertragen, dass man — nach den Regeln der Perspektive — die Schnittpunkte der Kegelseite mit den nach den verschiedenen Meridianpunkten gezogenen Radien als Projektionen der Meridianpunkte betrachtet.

Zur Erläuterung wollen wir wieder die **Fig. 56** benutzen, wobei wir aber voraussetzen, dass A_1 und B_1 die Schnittpunkte von MA und MB mit der Kegelseite sind. Die Bedingung der Bewahrung der Gesammtfläche lautet dann

$$2\pi\, NN' \cdot A_1B_1 = 2a\pi \cdot A'B'.$$

Nun ist aber $A_1B_1 = 2\,NA_1$ und

$$NN' = MN \cos\frac{\varphi' + \varphi''}{2} = NA_1 \cdot \cot AMN \cdot \cos\frac{\varphi' + \varphi''}{2},$$

und da der Winkel $AMN = \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$ ist, so erhält man unter Berücksichtigung von

$$A'B' = 2a \sin\frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cos\frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

zur Bestimmung von NA_1 die Gleichung

$$(15) \qquad NA_1 = a \tan\frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \sqrt{\cos\frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}.$$

Ist P ein beliebiger Punkt des Meridianes, welcher um ψ Grad nördlicher oder südlicher liegt als der Punkt K von der Breite $\frac{\varphi' + \varphi''}{2}$, so ist die Projektion NP' des Bogens KP durch die Gleichung

$$NP' = MN \cdot \tan \psi = NA_1 \cdot \cot \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cdot \tan \psi$$

gegeben, welche, wenn man für NA_1 den Werth (15) setzt, in

$$(16) \qquad NP' = a \tan \psi \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}$$

übergeht.

Bedeutet ψ_1 den Werth, welchen ψ für die beiden Punkte C und D besitzt, so ist einestheils

$$NC = a \sin \psi_1,$$

anderntheils zufolge (16)

$$NC = a \tan \psi_1 \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}},$$

aus welchen zwei Gleichungen sich zur Bestimmung des Winkels ψ_1 ergiebt

$$(17) \qquad \cos \psi_1 = \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}.$$

Mithin ist

$$(18) \quad NC = ND = a \sqrt{1 - \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}} = a \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{4}.$$

Zur Ermittelung des Halbmessers $ON = r_0$, mit welchem man den mittelsten Parallelkreis zu beschreiben hat, dient die Gleichung

$$r_0 = ON = MN \,.\, \cot MON = MN \cdot \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2},$$

und da

$$MN = a \cos \psi_1 = a \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}$$

ist, so hat man

$$(19) \qquad r_0 = a \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}.$$

Für einen beliebigen Parallelkreis, welcher um $\pm \psi$ Grad nördlich von dem durch K gehenden Mittel-Parallel liegt, ist der Halbmesser, mit dem derselbe auf der Karte beschrieben werden muss,

$$r = r_0 \mp NP'$$

oder

$$r = a \left(\cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \mp \tan \psi \right) \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}},$$

welcher Formel man auch die Gestalt

$$(20) \qquad r = \frac{a \cos \varphi \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}}{\sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \cos \left(\varphi - \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \right)}$$

geben kann, wo φ die Breite des Parallels bedeutet.

Was speciell die beiden äussersten Parallelkreise anlangt, so ist für den südlichsten $\varphi = \varphi'$ und der Halbmesser ist

$$(21) \qquad r' = \frac{a \cos \varphi'}{\sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}};$$

für den nördlichsten Parallel, $\varphi = \varphi''$, dagegen ist der Halbmesser

$$(22) \qquad r'' = \frac{a \cos \varphi''}{\sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}}.$$

Die Abwickelung des Kegels giebt einen Sektor, dessen äusserste Halbmesser einen Winkel von

$$360^\circ \cdot \frac{NN'}{ON} = 360^\circ \cdot \sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

mit einander einschliessen, gerade wie bei der ersten Murdoch'schen Projektion.

17. Die hier entwickelten Formeln reichen hin zur Berechnung derjenigen Elemente, welche zur Konstruktion einer derartigen Karte nöthig sind. Wie man leicht sieht, könnte man an die Stelle der Rechnung auch eine Konstruktion treten lassen. In der That hat man nur nöthig, in **Fig. 56** den Bogen AB des Meridianes, welcher zwischen den äussersten Parallelen von der Breite φ' und φ'' liegt, in K zu halbiren, den Halbmesser MK zu ziehen, von B (oder A) eine Senkrechte BL auf ihn zu fällen, so dass

$$ML = a \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}$$

ist, dann über MK einen Halbkreis zu konstruiren, welcher die Senkrechte BL oder ihre Verlängerung im Punkte J schneidet und schliesslich $MN = MJ$ zu machen, und man hat den Punkt N der vorigen Figur. Denn es ist

$$MN = MS = \sqrt{MK \cdot ML} = a \sqrt{\cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}},$$

wie es nach den obigen Auseinandersetzungen sein muss. Errichtet man nun NO senkrecht auf MN, so hat man damit die Kegelseite und kann nun die einzelnen Theilpunkte des Meridianes auf dieselbe übertragen, indem man die nach diesen Punkten hingehenden Radien zieht. Es bleibt dann nur noch die Abwickelung des Kegels übrig. Zu dem Zwecke schlägt man um O mit ON als Halbmesser einen Kreisbogen und trägt auf demselben die einzelnen Grade in der Grösse, wie sie sich auf einem Kreise mit dem Halbmesser NN' (**Fig. 56**) befinden ab. Dabei kann man sich, wenn es auf grössere Genauigkeit ankommt, der in §. 8, Nr. 13 (S. 55 unten) angegebenen Konstruktion bedienen, zuerst um die genauere Länge der Bogen auf dem Kreise mit dem Halbmesser NN' zu erfahren, und dann, bei umgekehrter Anwendung des Verfahrens, um diese Länge auf den Kreis vom Halbmesser ON abzutragen.

Alles weitere ist an sich klar.

18. Dritte Murdoch'sche Projektion. Zur Bestimmung der Geraden MN (Fig. 56), die nach dem Halbirungspunkte K des Meridianbogens AB hingeht, dient die Proportion

$$MN : MK = \text{Bog. } KA : \tan AMK,$$

aus welcher sich ergiebt

$$(23) \qquad MN = \frac{a\,(\varphi'' - \varphi')}{2 \tan \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}},$$

wo natürlich im Zähler $\varphi'' - \varphi'$ in Bogenmaass auszudrücken, oder, im Falle φ' und φ'' in Graden angegeben sind, mit 0,017453 . . zu multipliciren ist.

Da die Kegelseite senkrecht auf MN steht, so ergiebt sich hieraus der Radius, den der durch N gehende Kegelkreis, welcher den durch K gehenden Parallelkreis darstellt, in der Abwickelung hat,

$$ON = r_0 = MN \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

oder

$$(24) \qquad r_0 = \frac{a\,(\varphi'' - \varphi') \cot \frac{\varphi' + \varphi''}{2}}{2 \tan \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}.$$

Demnächst gilt es nun noch, die Abbildungen der äussersten Parallelkreise so zu wählen, dass die Gesammtfläche der Zone erhalten bleibt. Sind A_1 und B_1 die Abbildungen von A und B und wird $NA_1 = NB_1$ angenommen, so lautet die Bedingungsgleichung hierfür

$$2\,NN' \cdot \pi \cdot 2NA_1 = 2a^2\pi\,(\sin \varphi'' - \sin \varphi'),$$

und da

$$NN' = MN \cdot \cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

$$\text{und } \sin \varphi'' - \sin \varphi' = 2 \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cos \frac{\varphi' + \varphi''}{2}$$

ist, so erhält man

$$NA_1 = \frac{a^2 \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}{MN}.$$

Setzt man hier den Werth (23) ein, so ergiebt sich schliesslich

$$(25) \qquad NA_1 = NB_1 = \frac{2\,a \sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cdot \tan \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}{\varphi'' - \varphi'}.$$

Theilt man dann die Strecke A_1B_1 in ebensoviele gleiche Theile, als der Bogen AB Grade hat, so bekommt man die Punkte, durch welche die Abbildungen der einzelnen Parallelkreise gehen.

Die Abwickelung des Kegels ist dann leicht zu bewerkstelligen.

19. Besondere Vorzüge haben diese Murdoch'schen Projektionen, wie schon oben angedeutet, in keiner Weise. Zu Gunsten der zweiten kann man allerdings die Einfachheit ihrer Konstruktion und dann den Umstand anführen, dass sie in gewissem Sinne perspektivisch ist, also ein anschauliches Bild gewährt. Doch würde dies bei ihrer Verwendung zu geographischen Zwecken nicht sonderlich ins Gewicht fallen; höchstens für die Anfertigung von Sternenkegeln könnte es beachtenswerth sein.

Für schmale Zonen geben übrigens diese Methoden ganz brauchbare Netze, ein Vorzug, der freilich auch den übrigen Kegelprojektionen zukommt. Ueber mehr als 8 bis 10 Breitengrade darf man die Karte aber nicht ausdehnen, wenn man grössere Fehler vermeiden will.

V. Die Kegelprojektion von Albers.

20. Die Forderung, welche Murdoch an seine Karten stellt, dass nämlich die Gesammtfläche der dargestellten Zone in ihrer richtigen Grösse abgebildet werden soll, ist eigentlich eine ziemlich unwesentliche. Wichtiger würde es sein, die Uebertragung auf den Kegel so zu bewirken, dass alle Flächentheile auf der Kugel den ihnen entsprechenden auf der Kegelfläche gleichkommen.

Für diese — an sich unbestimmte — Aufgabe hat im Anschlusse an die Murdoch'schen Konstruktionen, H. C. Albers in Lüneburg eine Lösung gegeben, bei welcher vorausgesetzt wird, dass der Kegel zwei Parallelkreise mit der Kugel gleich lang hat.

Vergl. Ueber Murdoch's drey Kegelprojektionen. Zachs monatl. Korrespondenz, Febr. und Nov. 1805. Beschreibung einer neuen Kegelprojektion. Daselbst, Nov. 1805.

Wir geben hier in Kürze die Theorie dieser Projektion, die eigentlich in das vierte Kapitel, zu den äquivalenten Abbildungen gehört.

21. Sind φ' und φ'' die Breiten der beiden Parallelkreise, welche auf der Karte in ihrer wahren Länge dargestellt werden sollen, und bedeutet l die Seite des abgestumpften Kegels, welcher die zwischen beiden Kreisen liegende Zone darstellt, so wird die Bedingung, dass die Gesammtflächen der Kugelzone und der Mantelfläche des abgestumpften Kegels gleich sein sollen, durch die Gleichung ausgedrückt

$$a\pi (\cos \varphi' + \cos \varphi'') \, l = 2 \, a^2 \pi (\sin \varphi'' - \sin \varphi'),$$

aus welcher sich nach einigen einfachen Transformationen ergiebt

$$l = 2 \, a \tan \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}, \tag{26}$$

ein Werth, der sich höchst einfach konstruiren lässt, wenn man im Halbirungspunkte des Meridianbogens, der zwischen beiden Parallelen liegt, eine Tangente an denselben legt und diese beiderseits bis zu den Schnittpunkten der Halbmesser verlängert, welche nach den Endpunkten des Meridianbogens gehen.

22. Bezeichnet man mit r' und r'' die Halbmesser, mit denen auf der Karte die Abbildungen der erwähnten Parallelkreise ge-

schlagen werden, so müssen sich beide verhalten, wie die wahren Längen der Umfänge der Parallelkreise. Dies giebt die Projektion

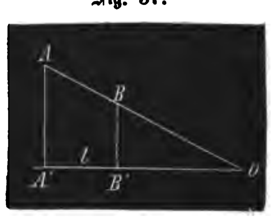
$$r' : r'' = \cos \varphi' : \cos \varphi''.$$

Da aber $r'' - r' = l$ ist, so kann man hieraus leicht die Werthe von r' und r'' ableiten:

$$(27) \quad \begin{cases} r' = \dfrac{l \cos \varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi''} = \dfrac{a \cos \varphi'}{\sin \dfrac{\varphi' + \varphi''}{2} \cos \dfrac{\varphi'' - \varphi'}{2}} \\ r'' = \dfrac{l \cos \varphi''}{\cos \varphi' - \cos \varphi''} = \dfrac{a \cos \varphi''}{\sin \dfrac{\varphi' + \varphi''}{2} \cos \dfrac{\varphi'' - \varphi'}{2}} \end{cases}$$

Es ist übrigens leicht, diese Werthe zu konstruiren. Trägt man auf einer Geraden (**Fig. 57**) die Strecke $A'B' = l$ und darauf senkrecht die Gerade $A'A$ und $B'B$ gleich den Halbmessern der beiden Parallelkreise von den Breiten φ' und φ''ab, zieht dann AB und verlängert diese Gerade bis zu ihrem Schnittpunkte O mit der Verlängerung von $A'B'$, so ist

Fig. 57.



$$OA' = r' \text{ und } OB' = r''.$$

23. Jeder der beiden Parallelkreise von den Breiten φ' und φ'', und so auch jeder der andern Parallelkreise, wird durch einen Bogen von

$$360^\circ \cdot k$$

dargestellt, wo k aus der Proportion

$$r' : a \cos \varphi' = 1 : k$$

gegeben ist. Hiernach ist

$$(28) \qquad k = \sin \frac{\varphi' + \varphi''}{2} \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}.$$

24. Es handelt sich jetzt noch um die Ermittelung des Halbmessers r, mit welchem vom gemeinsamen Centrum aus die Abbildung eines beliebigen Parallelkreises von der Breite φ zu beschreiben ist.

Wir wollen uns zu dem Zwecke die Differenz $r' - r$ in n gleiche Theile

$$\frac{r' - r}{n} = \delta$$

getheilt denken, wo n eine sehr grosse Zahl ist. Es mögen ferner den Radien

$$r', \quad r' - \delta, \quad r' - 2\delta. \quad \ldots, \quad r' - (n-1)\delta, \quad r' - n\delta = r$$

die Breiten

$$\varphi', \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1} \quad \varphi$$

entsprechen.

Die Bedingung, dass die schmalen Kegelzonen von der Höhe δ gleich sind den Kugelzonen von den Breitendifferenzen

$$\varphi_1 - \varphi', \quad \varphi_2 - \varphi_1, \quad \varphi_3 - \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi - \varphi_{n-1},$$

wird dann, wenn man den Faktor 2π weglässt, durch die Gleichungen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} r' k\delta &= a^2 (\sin \varphi_1 - \sin \varphi') \\ (r' - \delta) k\delta &= a^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \\ (r' - 2\delta) k\delta &= a^2 (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_2) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ [r' - (n-1)\delta] k\delta &= a^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_{n-1}). \end{aligned}$$

durch Addition dieser Gleichungen ergiebt sich aber

$$(29) \quad [nr' - (1 + 2 + \ldots + n-1)\delta] k\delta = a^2 (\sin \varphi - \sin \varphi').$$

Hier ist zunächst

$$1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

und es geht daher der mit $k\delta$ multiplicirte Ausdruck auf der linken Seite von (29) in

$$nr' - \frac{n(n-1)}{2}\delta = nr' - (n-1)\frac{r'-r}{2}$$

oder in

$$n\left[r' - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{r'-r}{2}\right]$$

über und die linke Seite von (29) wird also

$$\left[r' - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{r'-r}{2}\right] k \,.\, n\delta,$$

d. i., wenn man für $n\delta$ seinen Werth setzt und n dann über alle Grenzen wachsen lässt, wodurch $\frac{1}{n} = 0$ wird,

$$\left(r' - \frac{r'-r}{2}\right) k (r' - r) = \frac{r'^2 - r^2}{2} k.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (29) ein, so ergiebt sich

$$\frac{r'^2 - r^2}{2} k = a^2 (\sin \varphi - \sin \varphi')$$

oder

$$(30) \quad r^2 = r'^2 - \frac{2a^2}{k} (\sin \varphi - \sin \varphi').$$

Setzt man $\varphi = \varphi''$, so erhält man

$$r''^2 = r'^2 - \frac{2a^2}{k} (\sin \varphi'' - \sin \varphi')$$

und aus diesen beiden letzten Gleichungen folgt weiter

$$(31) \quad r^2 = r''^2 + \frac{2a^2}{k} (\sin \varphi'' - \sin \varphi).$$

Die Gleichungen (30) und (31) dienen zur Berechnung von r; man kann aber diesen Werth auf Grund derselben Gleichungen auch konstruiren.

25. Dieses Verfahren liefert Karten, bei denen die Verzerrung nicht sehr bedeutend ist, wenn man sich nicht über etwa 5° von jedem der beiden Parallelkreise entfernt, welche in ihrer wahren Grösse abgebildet werden. Die Entfernungen können dann ohne merklichen Fehler mit Hilfe eines in gleiche Theile getheilten Maassstabes gemessen werden. Genau genommen werden die Entfernungen von Nord nach Süd in der Mitte der Karte vergrössert, diejenigen von West nach Ost aber verkleinert, während jenseits der Parallelkreisse, welche unverändert bleiben, die Sache gerade umgekehrt ist, von Nord nach Süd Verkürzung, von Ost nach West Verlängerung eintritt. Diese Fehler werden um so bedeutender, je weiter die beiden Parallelen von der Breite φ' und φ'' von einander entfernt sind, wogegen sie natürlich von der Erstreckung der Karte in der Längenrichtung unabhängig sind, eine Eigenschaft, die übrigens allen Kegelprojektionen zukommt.

Setzt man das Kartennetz bis zum Pole und bis zum Aequator fort, so wird ersterer ($\varphi = 90°$) durch einen Kreis dargestellt, dessen Halbmesser durch die Gleichung

$$r_{90}^2 = r''^2 + \frac{2\,a^2}{k} \sin\varphi''$$

gegeben wird, während der Halbmesser, mit welchem der Aequator gezeichnet wird, durch

$$r_0 = r''^2 - \frac{2\,a^2}{k} (1 - \sin\varphi'')$$

bestimmt ist.

Unsere **Fig. XIX** auf **Taf. III** stellt ein solches vom Pol bis zum Aequator sich erstreckendes Gradnetz dar, bei welchem die Parallelen von 30° und 60° Breite in wahrer Grösse abgebildet sind.

Es mag noch bemerkt werden, dass Christ. Gottl. Reichard diese Projektion bei seiner im Jahre 1817 in Nürnberg veröffentlichten Generalkarte von Europa in Anwendung gebracht hat.

VI. Lambert's äquivalente Kegelprojektion.

26. Denselben Zwecke, dass nämlich alle einzelnen Flächen der Karte gleich den entsprechenden Flächen der Kugel sein sollen, erreicht man auch, wenn man

$$(32) \qquad r = 2\,a\sqrt{m} \cdot \sin\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)$$

oder

$$33) \qquad r^2 = 2\,a^2\,m\,(1 - \sin\varphi)$$

setzt.

Denn bedeutet r_1 den Werth des Halbmessers, welcher zu dem ein wenig grösseren Winkel φ_1 gehört, so ist

$$r_1^2 = 2\,a^2\,m\,(1 - \sin\varphi_1).$$

folglich

$$r^2 - r_1^2 = 2\,a^2\,m\,(\sin\varphi_1 - \sin\varphi).$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich aber

$$(r^2 - r_1^2)\frac{\pi}{m} = 2a^2\pi(\sin\varphi_1 - \sin\varphi)$$

und hier drückt die rechte Seite die Oberfläche der Kugelzone aus, welche zwischen den Parallelen von der Breite φ und φ' liegen, ganz gleich, wie gross die Differenz $\varphi_1 - \varphi$ ist. Die linke Seite aber bezeichnet den Flächenstreifen der Karte, der zwischen den beiden koncentrischen Kreisen von den Halbmessern r und r_1 liegt, wenn wir beide in der Ausdehnung von

$$\frac{360^0}{m}$$

zeichnen. Beide Flächen sind also gleich, und damit ist die Aequivalenz bewiesen.

27. Die Grösse $2a\sin\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$ lässt sich leicht zeichnen, sie wird nämlich dargestellt durch die Sehne des Meridianes, welche den Punkt von der Breite φ mit dem Pole verbindet.

Was die Grösse m anlangt, so haben wir schon gesehen, dass der Umfang eines Parallelkreises auf der Kugel durch den m ten Theil eines mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises auf der Karte dargestellt wird. Es geht daraus hervor, dass m die Seite des abzuwickelnden Kegels, dividirt durch den Halbmesser seiner Basis, darstellt.

Die Bestimmung von m kann auf die Weise erfolgen, dass auf einem bestimmten Parallelkreise von der Breite φ_1 die Längengrade im richtigen Verhältnisse zu den Breitengraden abgebildet werden.

Ist λ ein verschwindend kleiner Längenunterschied, so hat der zugehörige Bogen des Meridiangrades von der Breite φ_1 die Grösse $a\cos\varphi_1 \cdot \lambda$; die Abbildung dieses Bogens dagegen hat die Grösse $\frac{r_1\lambda}{m}$, wenn r_1 den zu φ_1 gehörigen Werth von r bezeichnet.

Es sei ferner φ eine Breite, die nur wenig geringer ist als φ_1, dann ist der zugehörige kleine Meridianbogen $a(\varphi_1 - \varphi)$ und die Abbildung desselben ist $r - r_1$ (weil offenbar r grösser als r_1 ist).

Obige Forderung giebt dann die Proportion

$$r - r_1 : \frac{r_1\lambda}{m} = a(\varphi_1 - \varphi) : a\cos\varphi_1 \cdot \lambda,$$

aus welcher folgt

$$\frac{r - r_1}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{r_1}{m\cos\varphi_1}. \tag{34}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung geht, wenn man

$$r_1 = 2a\sqrt{m}\sin\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)$$

und

$$\cos\varphi_1 = \sin(90^0 - \varphi_1) = 2\sin\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)$$

setzt, in den Ausdruck

$$\frac{a}{\sqrt{m}\cos\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

über. Auf der rechten Seite dagegen ist

$$\begin{aligned} r - r_1 &= 2a\sqrt{m}\left[\sin\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)\right] \\ &= 2a\sqrt{m}\cdot 2\cos\left(45^0 - \frac{\varphi + \varphi_1}{4}\right)\sin\frac{\varphi_1 - \varphi}{4} \end{aligned}$$

und da für $\varphi_1 - \varphi = 0$

$$\frac{4\sin\frac{\varphi_1 - \varphi}{4}}{\varphi_1 - \varphi} = 1$$

ist, so ist der Grenzwerth, in den die linke Seite der Gleichung (34) für $\varphi_1 - \varphi = 0$ übergeht,

$$a\sqrt{m}\cos\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right),$$

und diese Gleichung liefert also den Werth von m

$$m = \frac{1}{\cos^2\left(45^0 - \frac{\varphi_1}{2}\right)}. \tag{35}$$

28. Diese Projektion, die man als eine Kegelprojektion betrachten kann, aber nur wenn m grösser als die Einheit ist, ist von dem deutschen Mathematiker Joh. Heinrich Lambert in Berlin angegeben worden. Vergl. dessen Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Berlin 1772.

Wir kommen später nochmals auf diese Projektion zurück, welche uns auf **Taf. IV, Fig. XX** zeigt.

VII. Lambert's konforme Kegelprojektion.

29. Diese Methode wird uns ebenfalls später, in dem Kapitel, welches die konformen Projektionen behandelt, noch weiter beschäftigen; insbesondere werden wir dort sehen, wie sich die Sache gestaltet, wenn man statt der Kugel ein abgeplattetes Rotationsellipsoid in Betracht zieht.

Bei dieser Methode werden die Meridiane auf der Karte durch gerade Linien dargestellt, die von einem festen Punkte O ausgehen, und welche unter sich Winkel einschliessen, welche das μfache von den Winkeln sind, welche die Meridiane auf der Kugel miteinander bilden.

Die Parallelkreise werden durch Bogen dargestellt, deren Mittelpunkt O ist, und zwar gehört zum Parallelkreise von der Breite φ der Halbmesser

(36) $$r = c \tan^{\mu}\left(45^{\circ} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

In dieser Gleichung sind c und μ konstante Grössen, von denen die erstere natürlich nur den Maassstab der Karte beeinflusst. Die Bedeutung von μ kennen wir bereits; wir werden aber später noch sehen, wie man diese Konstante so bestimmen kann, dass noch gewissen Nebenbedingungen genügt wird.

30. Wir müssen jetzt zunächst zeigen, dass diese Methode eine konforme Abbildung liefert.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Konformität ist aber die folgende: Sind P_1 und M zwei Punkte der Kugelfläche, welche dem Punkte P benachbart sind und von denen der erste mit P auf demselben Meridiane, der letztere aber mit P auf demselben Parallelkreise liegt, und bedeuten ferner P', P_1' und M' die Projektionen von P, P_1 und M, so muss die Gleichung

(37) $$\frac{PP_1}{PM} = \frac{P'P_1'}{P'M'}$$

um so genauer richtig sein, je kleiner die Strecken PP_1 und PM sind, und sie muss in aller Strenge bestehen, wenn dieselben beide gleich Null sind.

Bezeichnet man nun das Komplement der Breite, $90^{\circ} - \varphi$, mit χ und nimmt man an, dass zu P der Werth χ, zu P_1 der Werth χ_1 gehört, so ist

$$PP_1 = a\,(\chi_1 - \chi),$$

und wenn man ferner die Längendifferenz von P und M mit $\lambda_1 - \lambda$ bezeichnet, so ist

$$PM = a\,(\lambda_1 - \lambda) \sin \chi.$$

Die linke Seite von (37) liefert also den Bruch

$$\frac{\chi_1 - \chi}{(\lambda_1 - \lambda) \sin \chi}.$$

Ferner geht (36) über in

(36a) $$r = c \tan^{\mu} \frac{\chi}{2},$$

und wenn man den zu χ_1 gehörigen Werth von r mit r_1 bezeichnet, so sieht man leicht ein, dass

$$P'P_1' = r_1 - r$$

ist. Ausserdem ist nach der früheren Feststellung

$$P'M' = \mu r\,(\lambda_1 - \lambda).$$

Sonach geht die Bedingung der Konformität (37) über in die Gleichung

$$\frac{\chi_1 - \chi}{(\lambda_1 - \lambda) \sin \chi} = \frac{r_1 - r}{\mu r\,(\lambda_1 - \lambda)};$$

streicht man beiderseits $\lambda_1 - \lambda$, so nimmt die Gleichung die Gestalt an

(38) $$\frac{r_1 - r}{r\,(\chi_1 - \chi)} = \frac{\mu}{\sin \chi},\quad \chi_1 - \chi = 0.$$

Nun ist

$$\frac{r_1}{r} = \left(\frac{\tan\frac{\chi_1}{2}}{\tan\frac{\chi}{2}}\right)^{\mu},$$

oder, was dasselbe ist,

$$1 + \frac{r_1 - r}{r} = \left(1 + \frac{\tan\frac{\chi_1}{2} - \tan\frac{\chi}{2}}{\tan\frac{\chi}{2}}\right)^{\mu}.$$

Bezeichnen wir den Bruch in der Klammer auf der rechten Seite dieser Gleichung mit z, so kann man statt dieser Gleichung auch schreiben

$$1 + \frac{r_1 - r}{r} = (1 + z)^{\mu}$$

und wenn man rechts nach dem binomischen Satze entwickelt und beiderseits die Einheit weglässt, so wird

$$(39) \quad \frac{r_1 - r}{r} = \frac{\mu}{1} \cdot z + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} \cdot z^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z^3 + \dots$$

Diese Gleichung dividiren wir mit $\chi_1 - \chi$ und erhalten dann links denselben Ausdruck wie in Gleich. (38). Rechts aber können wir schreiben

$$(40) \quad \frac{z}{\chi_1 - \chi}\left(\frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} \cdot z + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z^2 + \dots\right).$$

Nun ist

$$\frac{z}{\chi_1 - \chi} = \frac{\tan\frac{\chi_1}{2} - \tan\frac{\chi}{2}}{(\chi_1 - \chi)\tan\frac{\chi}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\chi_1 - \chi)}{\frac{1}{2}(\chi_1 - \chi)\, 2\sin\frac{1}{2}\chi \cos\frac{1}{2}\chi_1};$$

lässt man aber χ_1 in χ übergehen, so wird

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\chi_1 - \chi)}{\frac{1}{2}(\chi_1 - \chi)} = 1$$

und man bekommt also

$$\frac{z}{\chi_1 - \chi} = \frac{1}{2\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}} = \frac{1}{\sin\chi}.$$

Mithin erhält man für $\chi_1 - \chi = 0$ statt (39) die Gleichung

$$(41) \quad \frac{r_1 - r}{(\chi_1 - \chi) r} = \frac{1}{\sin\chi}\left(\mu + \frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2} \cdot z + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^2 + \dots\right).$$

Nun ist aber für $\chi_1 - \chi = 0$ auch

$$z = \frac{\tan\frac{\chi_1}{2} - \tan\frac{\chi}{2}}{\tan\frac{\chi}{2}} = 0,$$

und es verschwinden also in (41) die mit z multiplicirten Glieder. Daraus folgt nun allerdings noch nicht, dass auch ihre Summe verschwindet; denn wenn μ keine ganze Zahl ist, so ist die Anzahl dieser Glieder unendlich gross und die Summe einer unendlichen Anzahl von Gliedern, welche einzeln sich der Grenze Null unbegrenzt nähern, kann alle möglichen Werthe haben. In der letzten Nummer des §. 4 haben wir z. B. gesehen, dass die Ellipsenfläche durch eine Summe von unendlich vielen schmalen Streifen dargestellt werden kann, deren jede in Null übergeht. In unserem Falle aber ist

$$\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2} z + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} z^2 + \ldots$$
$$= z\left(\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} z + \ldots\right)$$

und hier ist die Summe der eingeklammerten Reihe jedenfalls eine positive Grösse, welche kleiner ist, als die Summe der Binomialkoefficienten

$$1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Diese Summe hat aber den Werth

$$(1+1)^\mu = 2^\mu.$$

Multiplicirt man diesen endlichen Werth mit $z = 0$, so erhält man das Produkt Null. Grösser kann die Summe der mit z multiplicirten Glieder in (41) auch nicht sein, und da dieselbe auch nicht negativ sein kann, so muss sie den Werth Null haben. Mithin erhält man aus (41) das Ergebniss

$$\frac{r_1 - r}{(\chi_1 - \chi) r} = \frac{\mu}{\sin\chi},$$

übereinstimmend mit Gleich. (38).

Sonach liefert die Lambert'sche Methode in der That eine konforme Abbildung.

31. Die lineare Vergrösserung in dem Punkte von der Breite φ und der Länge λ wird durch die Gleichung

$$\varkappa = \frac{P'P'_1}{PP_1} = \frac{P'M'}{PM}$$

bestimmt. Aus den in voriger Nummer angeführten Werthen von $P'M'$ und PM ergiebt sich

$$\varkappa = \frac{\mu r}{a\cos\varphi} = \frac{\mu c}{a\cos\varphi}\cdot\tan^\mu\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{42}$$

Die Flächenvergrösserung hat den Werth $\varkappa^2$.

Beide Werthe sind von der Länge λ unabhängig, wie dies bei allen Kegelprojektionen der Fall ist.

32. Die Bestimmung der Konstanten μ kann mittels der Bedingung erfolgen, dass auf zwei bestimmten Parallelkreisen von der Breite φ' und φ'' das Verhältniss der Längengrade auf der Karte und auf der Kugel einen und denselben Werth hat.

Bezeichnen r' und r'' die zu φ' und φ'' gehörigen Werthe von r, die wir analog (36a) uns in der Form

$$r' = c \tan^{\mu} \frac{\chi'}{2} \text{ und } r'' = c \tan^{\mu} \frac{\chi''}{2}$$

denken wollen, so müssen diese beiden Radien sich wie die Radien der beiden Parallelkreise

$$a \sin \chi' \text{ und } a \sin \chi''$$

auf der Kugel verhalten. Dies giebt die Gleichung

$$\left(\frac{\tan \frac{\chi'}{2}}{\tan \frac{\chi''}{2}}\right)^{\mu} = \frac{\sin \chi'}{\sin \chi''},$$

aus welcher sich ergiebt

$$\mu = \frac{l \sin \chi' - l \sin \chi''}{l \tan \frac{\chi'}{2} - l \tan \frac{\chi''}{2}}. \tag{43}$$

In dieser Gleichung kann man selbstverständlich statt der natürlichen Logarithmen, die durch das Symbol l angedeutet werden, auch gemeine Logarithmen nehmen.

Auf **Taf. IV** zeigt **Fig. XXII** die ganze Erdoberfläche unter der Voraussetzung $\mu = \frac{1}{2}$.

§. 16.

Modifikationen der Kegelprojektion.

1. Von den im vorigen Paragraphen betrachteten Projektionen stehen einige nur sehr lose mit der Abwickelung eines Kegels in Verbindung; bei den beiden letzten z. B. kann man die Rücksicht auf den Kegel ganz ausser Acht lassen, ohne damit einen wesentlichen Punkt ihrer Theorie zu vernachlässigen.

Derartige Projektionen, bei denen die Abwickelung des Kegels eigentlich keine Rolle mehr spielt, die aber doch mehr oder minder mit den Kegelprojektionen verwandt sind, wollen wir in diesem Paragraphen noch eine Anzahl besprechen. Sie sind meist hervorgegangen aus dem Bestreben, eine grössere Genauigkeit in der kartographischen Darstellung zu erreichen, als durch eine eigentliche Kegelprojektion möglich ist.

I. Die zweite Projektion des Ptolemäus.

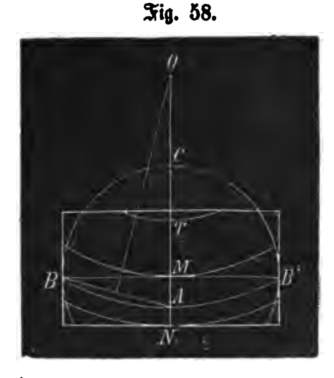
2. Ptolemäus hat im 24. Kapitel des ersten Buches seiner Geographie ausser der im vorigen Paragraphen erwähnten noch

eine zweite Kartenprojektion beschrieben, die er für vorzüglicher hält als die erste.

Ptolemäus begrenzt die damals bekannte Erdoberfläche südlich durch den Antiparallel von Meroë, 16° 30′ südl. Breite, nördlich durch den Parallel von Thule, 63° nördl. Breite. Ziemlich in der Mitte liegt der Parallel von Syena, 23° 50′ nördl. Breite, und wenn man sich daher das Auge eines Beobachters in der Ebene dieses Parallels denkt, so erscheint der Aequator als eine Linie, die ihre konkave Seite nach Norden kehrt und deren Mitte $23\frac{5}{6}$° südlich von der Mitte der Karte liegt. Diese Idee hat Ptolemäus, wie es scheint, bei seiner übrigens willkürlichen Konstruktion geleitet. (Fig. 58).

Als Einheit dient die Grösse eines Aequatorgrades. Man beschreibt nun zunächst um den Mittelpunkt M mit dem Halbmesser 90 einen Kreis, zieht in demselben den Halbmesser MB und einen darauf senkrechten MC, trägt auf der Rückwärtsverlängerung des letzteren $MA = 23\frac{5}{6}$ ab und bestimmt nun den Mittelpunkt O des Kreises, der durch B, A und den Punkt B' geht, der B diametral gegenüber liegt. Zu dem Zwecke halbirt man AB, errichtet im Halbirungspunkte eine Senkrechte auf AB und verlängert diese, bis sie die Verlängerung von MC in O schneidet.

Fig. 58.



Zur Berechnung von AO hat man

$$\tan ABM = \frac{MA}{MB} = \frac{23\frac{5}{6}}{90}, \text{ also } ABM = 14^\circ\, 51',$$

$$MO = \frac{MB}{\tan 2 \cdot 14^\circ\, 51'} = 157,\, 79,$$

$$AO = 23{,}86 + 157{,}79 = 181{,}65,$$

wofür Ptolemäus $181\frac{1}{2}$ rechnet. Trägt man dann noch von OA aus nach Süden $AN = 16\frac{1}{2}$ und nach Norden $AT = 63$ ab und schlägt von O als Mittelpunkt aus durch die Punkte A, N, M und T Kreisbogen, so repräsentiren dieselben den Aequator und die Parallelen von $16\frac{1}{2}$ südl. Breite (Antiparallel von Meroë), $23\frac{5}{6}$° und und 63° nördl. Breite (Syena und Thule). Die gerade Linie ON stellt den ersten Meridian dar. Ferner trägt man auf dem Aequator die Länge der einzelnen Grade ab, auf den übrigen Parallelen aber diese Längen multiplicirt jedesmal mit dem Cosinus der Breite. Verbindet man alsdann die Punkte gleicher Länge aus freier Hand durch eine stetige Kurve, so erhält man die Abbildungen der verschiedenen Meridiane. — Ptolemäus giebt seiner Karte übrigens eine Länge gleich 180 und eine Breite gleich 90.

II. Bonne's Projektion.

3. Diese Projektion blieb so ziemlich ganz vergessen, bis nach dem Wiederaufblühen der Wissenschaften und nach dem gewaltigen Impulse, welchen die Entdeckungen der Spanier und Portugiesen der geographischen Wissenschaft gegeben hatten, Bernhard de Sylva im Jahre 1507 in Venedig eine neue Ausgabe der Geographie des Ptolemäus herausgab, wobei er das Gradnetz des Ptolemäus erweiterte um die neuen Entdeckungen einzeichnen zu können. Das ganze Verfahren erfuhr dann durch verschiedene Geographen, namentlich durch Petrus Apianus (Peter Bienewitz oder Bennewitz, 1403 in der Gegend von Leisnig in Sachsen geboren, gestorben 1552 in Ingolstadt), Orontius Finäus (1532), Guillaume le Testu (1566) mancherlei Modifikationen, so dass schliesslich die Projektion entstand, welche man gewöhnlich als die Bonne'sche bezeichnet, weil der französische Geograph Rigobert Bonne (1727 — 1795) im Jahre 1752 zuerst ihre wesentlichen Vorzüge hervorgehoben hat.

4. Die Hauptpunkte bei dieser Projektion sind folgende:

Die Parallelkreise erscheinen als koncentrische Kreise;

der erste Meridian wird durch eine gerade Linie dargestellt, welche alle Parallelkreise rechtwinklig schneidet;

der gemeinsame Mittelpunkt der verschiedenen Parallelkreise liegt auf dem ersten Meridiane in solcher Entfernung vom mittleren Parallel, als wäre die Karte die Abwickelung eines Kreiskegels, der die Kugel längs dieses Parallels berührt. Ist also φ' die Breite des mittleren Parallels, so ist

$$r' = a \cot \varphi'$$

der Halbmesser, mit welchem der mittlere Parallelkreis auf der Karte beschrieben wird.

Die Abschnitte, welche die einzelnen Parallelkreise auf dem ersten Meridiane bilden, sind den wirklichen Meridianabschnitten auf der Kugel gleich.

Die einzelnen Grade auf den verschiedenen Parallelkreisen haben ebenfalls auf der Karte dieselbe Grösse wie auf der Kugel, und die Meridiane sind deshalb, mit Ausnahme des ersten, sämmtlich krumme Linien.

5. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass der Halbmesser des Parallelkreises von der Breite φ durch die Gleichung

$$r = a \cot \varphi' + a (\varphi' - \varphi)$$

gegeben ist.

6. Da man ferner einen verschwindend schmalen Streifen zwischen zwei Parallelen von der Breite φ und φ_1 auf der Kugel berechnet, wenn man die Länge des Parallels von der Breite φ mit $a(\varphi_1 - \varphi)$ multiplicirt, und da beide Längen auf der Karte in ihrer wahren Grösse und rechtwinklig zu einander erscheinen, so wird ein solcher Streifen in seiner wahren Grösse auf der Karte abgebildet. Was von dem einen Streifen oder einem bestimmten Theile desselben gilt, gilt auch von einer Summe solcher Streifen oder bestimmter Theile derselben. Und da man jede Fläche auf

der Kugel sich in schmale Streifen in Richtung der Parallelkreise zerlegt denken kann, so folgt, dass jede Fläche auf der Kugel auch auf der Karte in ihrer wahren Grösse erscheinen muss; die Bonne'sche Projektion liefert also eine äquivalente Abbildung und wird daher im nächsten Kapitel, namentlich was die Ausdehnung des Verfahrens auf das Sphäroid betrifft, nochmals besprochen werden.

7. Diese Darstellungsweise ist seit Bonne vielfach in Aufnahme gekommen und namentlich zur Abbildung ganzer Erdtheile beliebt.

Auf **Taf. IV** ist in **Fig. XXII** die nördliche Erdhälfte in dieser Weise dargestellt, wobei als mittelster Parallelkreis der von 45° angenommen ist. Man wird freilich die Bonne'sche Projektion nicht in solchem Umfange wirklich anwenden. Die Figur zeigt aber recht deutlich, wie in der Nähe des ersten Meridianes und des mittelsten Parallels die Formen gewahrt werden, während weiterhin merkliche Verzerrungen sich geltend machen.

III. Die Sanson-Flamsteed'sche Projektion.

8. Dieselbe ist nur ein besonderer Fall der vorigen. Wenn man nämlich als mittelsten Parallel den Aequator nimmt, so fällt der Punkt, von welchem aus die Abbildungen der Parallelkreise zu beschreiben sind, in unendliche Ferne und die Parallelkreise erscheinen dann als gerade Linien, die senkrecht auf dem ersten Meridiane stehen.

Auf **Taf. IV** ist in **Fig. XXIII** die ganze Erdoberfläche in dieser Weise dargestellt. Der erste Meridian erscheint in seiner wahren Länge, die darauf senkrechten, in Form von Geraden sich darstellenden Parallelkreise haben ebenfalls ihre wahre Länge, der Aequator ist also doppelt so lang als der erste Meridian. Die verschiedenen Meridiane theilen die Parallelkreise in gleiche Theile, auf der Karte von 10 zu 10 Grad.

9. Bezeichnet man den Abstand des Parallels von der Breite φ vom Aequator mit y, dagegen mit x den Abstand eines Kartenpunktes vom ersten Meridiane, so ist für den Punkt von der geographischen Breite φ und der Länge λ

$$x = a\,\lambda \cos \varphi \text{ und } y = a\,\varphi;$$

mithin wird der Meridian von der Länge λ durch die transcendente Kurve

$$x = a\,\lambda \cos \frac{y}{a}$$

dargestellt. Da man diese Gleichung auch in der Form

$$x = a\,\lambda \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{a}\right)$$

schreiben kann, und da

$$x = k \sin \frac{y}{a}$$

eine Sinusoide darstellt, so hat D'Avezac diese Projektion nach der Gestalt der Meridiane als sinusoïdale Projektion bezeichnet.

10. Nach dem was im ersten Kapitel in der Theorie der Kegelschnitte mitgetheilt worden, bedeutet der Grenzwerth, dem sich der Ausdruck

$$\frac{x_1 - x}{y_1 - y}$$

nähert, wenn $y_1 - y$ in Null übergeht, die trigonometrische Tangente des Winkels τ, den die geometrische Tangente der Kurve im Punkte (x, y) mit der positiven Richtung der Achse der y, also hier mit dem ersten Meridiane bildet.

Nun ist

$$\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = \frac{a \lambda \left(\cos \frac{y_1}{a} - \cos \frac{y}{a}\right)}{y_1 - y}$$

$$= - \lambda \frac{\sin \frac{y_1 - y}{2a} \cdot \sin \frac{y_1 + y}{2a}}{\frac{y_1 - y}{2a}},$$

und dieser Ausdruck geht für $y_1 - y = 0$ in

$$\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = - \lambda \sin \frac{y}{a}$$

über. Für $y = \frac{a\pi}{2}$ erhält man

$$\frac{x_1 - x}{y_1 - y} = - \lambda,$$

eine Gleichung, durch welche der Winkel bestimmt wird, den der Meridian von der Länge λ im Pole mit der y-Achse bildet. Für den letzten Meridian der **Fig. XXIII** ist $\lambda = \pi$, daher ergiebt sich für den Winkel τ der Werth

$$180^0 - 72^0\ 20'\ 36''.$$

Die beiden äussersten Meridiane schneiden sich daher im Pole unter einem Winkel von

$$144^0\ 41'\ 12''.$$

11. Diese Projektion wurde von Nikolas Sanson aus Abbeville erfunden, der sich ihrer beim Entwurfe der Karten von Europa, Asien, Afrika und Amerika bediente, die er im Jahre 1650 veröffentlichte.

Erst viel später hat auch der englische Astronom John Flamsteed sie gleichfalls angewandt, und zwar bei den Himmelskarten in seinem werthvollen *Atlas coelestis*, der 1629, neun Jahre nach seinem Tode, zum ersten Male veröffentlicht wurde. Seitdem wird diese Art der Darstellung häufig als Flamsteed'sche Projektion bezeichnet.

Sie eignet sich vorzugsweise für Länder nicht allzugrosser Ausdehnung nach Breite oder Länge, die vom Aequator durchschnitten werden, und ist namentlich für Karten von Afrika sehr beliebt.

Neuerdings ist dieselbe übrigens als angeblich neu unter dem Namen „isographische Projektion“ vom Medicinalrath Mohr in der am 6. Februar 1865 abgehaltenen Sitzung der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zur Darstellung der ganzen Erdoberfläche empfohlen worden. Dazu dürfte sie sich indessen weniger eignen.

IV. Die äquivalente Projektion von Joh. Werner.

12. Man erhält das Gegenstück der Sanson'schen Projektion, wenn man den Kegel statt in einen Cylinder in eine Ebene übergehen lässt, welche die Kugel im Pole berührt. Da die Spitze des Kegels alsdann mit dem Pole zusammenfällt, so ist der Radius, mit welchem die Abbildung eines Parallelkreises zu beschreiben ist, gleich dem Meridianbogen zwischen dem Parallel auf der Kugel und dem Pole:

$$r = a\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = a\chi;$$

die Parallelkreise werden in ihrer wahren Länge abgetragen. Es erscheint demnach der Quadrant des Parallelkreises von der Breite φ als ein Bogen, dessen Centriwinkel

$$\theta = 90^0 \frac{a \sin \chi}{r} = 90^0 \frac{\sin \chi}{\chi}$$

ist. In diesen beiden Formeln ist natürlich der Faktor, beziehentlich Divisor χ in Bogenmaass auszudrücken, $1^0 = 0{,}0174533$. Die folgende Tafel enthält die Werthe von θ für die verschiedenen Werthe von χ von 0 bis 180° von 10 zu 10 Grad.

χ	θ		χ	θ	
0°	90°	0′	100°	50°	45′
10	89	33	110	44	3
20	88	11	120	37	12
30	85	57	130	30	23
40	82	53	140	23	40
50	79	1	150	17	10
60	74	26	160	11	1
70	69	12	170	5	16
80	63	27	180	0	0
90	57	18			

Auf **Taf. IV** zeigt uns **Fig. XXIV*** eine Darstellung der halben Erdoberfläche nach diesem Verfahren.

13. Dasselbe rührt von dem deutschen Geometer Johann Werner (1468 — 1528) aus Nürnberg her, der im Jahre 1514 bei Gelegenheit einer Uebersetzung und Erklärung des ersten Buches der

Geographie des Ptolemäus drei Projektionsarten aufgeführt hat, von denen die vorstehende die zweite ist.

Die beiden anderen Projektionen haben mit der obigen das gemein,

dass die Abbildungen aller Parallelkreise Kreisbogen mit dem einen Pole als gemeinsamem Mittelpunkte sind;

dass die Abstände dieser Bogen von einander gleich sind den Meridianbogen, welche auf der Kugel zwischen den einzelnen Meridianen liegen, und

dass die Grössen der Längengrade auf verschiedenen Parallelkreisen auf der Karte in demselben Verhältnisse stehen, wie auf der Kugel.

Bei der ersten von Werner angegebenen Projektion wird aber der Aequator durch einen vollen Kreis dargestellt, bei der dritten durch einen Bogen von 240°; während er bei der zweiten als ein Bogen von 229° 11′ erscheint. Es sind daher bei der ersten sowohl als bei der dritten Projektion Werners die Parallelkreise im Verhältniss zu den Graden des ersten Meridianes zu gross.

Nur die zweite dieser drei Darstellungsweisen erscheint als besonderer Fall der Sanson'schen und ist dahar äquivalent.

V. Die polykonischen Projektionen.

14. Die verschiedenen Kegelprojektionen eignen sich alle vorzugsweise zur Darstellung einer schmalen Zone, die auf beiden Seiten eines Mittelparallels liegt, welcher von den Meridianabbildungen rechtwinklig geschnitten wird.

Handelt es sich aber um die Darstellung einer viele Breitengrade umfassenden Partie der Erdoberfläche, so liegt der Gedanke nahe, dieselbe in verschiedene Zonen zu zerlegen, die nur eine geringe Breitenausdehnung besitzen und für jede dieser schmalen Zonen einen anderen Kegel in Anwendung zu bringen, worauf man das System dieser abgestumpften Kegelflächen abwickelt. Wenn man dabei die Breite der einzelnen Zonen verschwindend klein annimmt, so erscheint jeder Parallelkreis in der Abwickelung als ein Kreisbogen, dessen Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist, der die Kugel längs dieses Parallelkreises berührt, und die ganze Karte lässt sich nach folgenden Regeln konstruiren.

Der erste Meridian erscheint in seiner wahren Länge als gerade Linie; senkrecht darauf und ihn halbirend steht die Gerade, welche den Aequator repräsentirt und welche die doppelte Länge hat. Die verschiedenen Parallelen, auf der Karte wie gewöhnlich von 10 zu 10 Grad angegeben, theilen den ersten Meridian in gleich grosse Theile. Sie erscheinen übrigens in ihrer wahren Länge und als Kreise, deren Mittelpunkte auf den Verlängerungen des ersten Meridianes liegen, für die nördliche Halbkugel jenseits des Nordpoles, für die südliche jenseits des Südpoles. Der Halbmesser des Parallels von der Breite φ ist unter Voraussetzung einer Kugel

$$r = a \cot \varphi.$$

Wie bei allen Kegelprojektionen sind hier die Längengrade auf einem und demselben Parallelkreise von gleicher Grösse, und zwar behalten sie bei dieser Darstellung ihre wahre Grösse bei.

Die Meridiane sind durch diese Bestimmungen unzweideutig gegeben.

In nachstehender Tabelle geben wir für die verschiedenen Breiten von Grad zu Grad die Werthe des Halbmessers r, mit welchem jeder Parallel zu beschreiben ist, sowie die Grösse eines Längengrades. Als Einheit dient dabei die Grösse des Aequatorgrades, daher sich für den Halbmesser der Kugel der Werth

$$a = 57{,}295779,$$

für den Halbmesser des Parallelkreises 57,295779 cot φ und für die Grösse des Längengrades cos φ

ergiebt.

Breite	Grösse des		Breite	Grösse des	
φ	Längengrades.	Halbmessers r.	φ	Längengrades.	Halbmessers r.
0°	1,0000	∞	26°	0,8988	117,474
1	0,9998	3282,473	27	0,8910	112,449
2	0,9994	1640,736	28	0,8829	107,758
3	0,9986	1093,268	29	0,8746	103,364
4	0,9976	819,368	30	0,8660	99,239
5	0,9962	654,894	31	0,8572	95,356
6	0,9945	545,133	32	0,8480	91,692
7	0,9925	466,637	33	0,8387	88,228
8	0,9903	407,681	34	0,8290	84,944
9	0,9877	361,751	35	0,8192	81,827
10	0,9848	324,940	36	0,8090	78,861
11	0,9816	294,761	37	0,7986	76,034
12	0,9781	269,556	38	0,7880	73,335
13	0,9744	248,175	39	0,7771	70,754
14	0,9703	229,801	40	0,7660	68,282
15	0,9659	213,831	41	0,7547	65,911
16	0,9613	199,814	42	0,7431	63,633
17	0,9563	187,406	43	0,7314	61,442
18	0,9511	176,338	44	0,7193	59,331
19	0,9455	166,399	45	0,7071	57,296
20	0,9397	157,419	46	0,6947	55,330
21	0,9336	149,261	47	0,6820	53,429
22	0,9272	141,812	48	0,6691	51,589
23	0,9205	134,980	49	0,6561	49,806
24	0,9135	128,688	50	0,6428	48,077
25	0,9063	122,871			

Breite φ	Grösse des Längengrades.	Grösse des Halbmessers r.	Breite φ	Grösse des Längengrades.	Grösse des Halbmessers r.
51°	0,6293	46,397	71°	0,3256	19,729
52	0,6157	44,764	72	0,3090	18,617
53	0,6018	43,175	73	0,2924	17,517
54	0,5878	41,628	74	0,2756	16,429
55	0,5736	40,119	75	0,2588	15,352
56	0,5592	38,646	76	0,2419	14,285
57	0,5446	37,208	77	0,2250	13,228
58	0,5299	35,802	78	0,2079	12,179
59	0,5150	34,427	79	0,1908	11,137
60	0,5000	33,080	80	0,1736	10,103
61	0,4848	31,760	81	0,1564	9,075
62	0,4695	30,465	82	0,1392	8,052
63	0,4540	29,194	83	0,1219	7,035
64	0,4384	27,945	84	0,1045	6,022
65	0,4226	26,717	85	0,0872	5,013
66	0,4067	25,510	86	0,0698	4,007
67	0,3907	24,321	87	0,0523	3,003
68	0,3746	23,149	88	0,0349	2,001
69	0,3584	21,994	89	0,0175	1,000
70	0,3420	20,854	90	0,0000	0,000

15. Die Konstruktion des Netzes ist nach diesen Angaben sehr einfach.

Man errichtet zunächst zwei aufeinander senkrechte Gerade, von denen die eine den Aequator, die andere den ersten Meridian darstellt.

Soll nun die ganze Erdoberfläche abgebildet werden, so trägt man auf der ersten Geraden beiderseits 180, auf der letzten 90 gleich grosse Grade ab.

Auf dem ersten Meridiane trägt man ausserdem von jedem Punkte aus den in vorstehender Tabelle angegebenen Werth von r in der Richtung über den Pol hinaus ab; setzt dann im Endpunkte von r den Zirkel ein und schlägt einen durch den Theilpunkt gehenden Kreisbogen, auf dem man dann die Längengrade in der Grösse, wie die Tabelle angiebt, abträgt.

Indem man zuletzt noch die Punkte gleicher Länge verbindet, erhält man die Meridiane.

Bei nicht zu grossem Maassstabe kann man übrigens ohne merklichen Fehler den Meridian von 90° Länge als einen Kreis betrachten, der über der Entfernung der Pole als Durchmesser beschrieben ist. Wenn man diesen Kreis gleich Anfangs zeichnet,

ehe man auf jedem Parallel die Längengrade abträgt, so kann man letztere auch erhalten, indem man die innerhalb dieses Kreises gelegenen Parallelkreisbogen in gleiche Theile theilt, beispielsweise in 18, wenn man die Meridiane von 10 zu 10 Grad zu zeichnen wünscht.

Auf **Taf. IV** zeigt uns **Fig. XXV** diese Projektionsmethode, ausgedehnt über etwas mehr als $\frac{3}{4}$ der Kugeloberfläche; da die linke und rechte Hälfte symmetrisch sind, ebenso wie die obere und die untere, so ist es leicht sich die fehlenden Partien zu ergänzen.

16. Es ist bei dieser Abbildung leicht, der Abplattung der Erde Rechnung zu tragen.

In diesem Fall ist

ein Aequatorgrad $= \frac{2a\pi}{360} = a \cdot 0{,}0174533 = a\mu,$

ein Längengrad von der Breite $\varphi = \frac{a\mu \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}},$

ein Meridiangrad von der mittleren Breite φ

$$= \frac{a(1-\varepsilon^2)\mu}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}^3},$$

der Halbmesser des Kreises, welcher auf der Karte den Parallelkreis von der Breite φ darstellt, $r = \frac{a \cot \varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}.$

17. Für grosse Karten ist es nicht gut möglich, die Parallelkreise mit dem Zirkel zu konstruiren. Dann zeichnet man einzelne Punkte mittels ihrer Koordinaten x und y. Bedeutet x den Abstand eines Punktes der Karte, dessen Länge λ und dessen Breite φ ist, vom ersten Meridian, während der Abstand vom Aequator, vermindert um die wahre Länge des Meridianbogens vom Parallelkreis bis zum Aequator durch y ausgedrückt wird, so ist

$$x = r \sin \Theta = \frac{a \cot \varphi \sin \Theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$$

$$y = r - r \cos \Theta = \frac{2a \cot \varphi \sin^2 \frac{1}{2}\Theta}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}}.$$

In diesen Formeln bedeutet Θ den Winkel zwischen dem ersten Meridiane und demjenigen Halbmesser des Parallelkreises der Karte, der nach dem Punkte von der Länge λ und der Breite φ hingeht. Da

$$r\Theta = \frac{a \lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$$

ist, so hat man zur Berechnung von Θ die Gleichung

$$\Theta = \lambda \sin \varphi.$$

Die folgende, von G e r m a i n gegebene Tabelle zeigt uns die Werthe von Θ für $\lambda = 10$ Grad für die verschiedenen Breiten von Grad zu Grad.

φ	Θ für $\lambda = 10^\circ$	φ	Θ für $\lambda = 10^\circ$	φ	Θ für $\lambda = 10^\circ$
0°	0° 00′ 00.0″	31°	5° 09′ 01.4″	61°	8° 44′ 46.3″
1	0 10 28.3	32	5 17 57.1	62	8 49 46.1
2	0 20 56.4	33	5 26 47.0	63	8 54 36.2
3	0 31 24.1	34	5 35 31.0	64	8 59 16.6
4	0 41 51.2	35	5 44 08.8	65	9 03 47.1
5	0 52 17.6	36	5 52 40.3	66	9 08 07.6
6	1 02 43.0	37	6 01 05.3	67	9 12 18.2
7	1 13 07.3	38	6 09 23.8	68	9 16 18.6
8	1 23 30.2	39	6 17 35.5	69	9 20 08.9
9	1 33 51.6	40	6 25 40.4	70	9 23 48.9
10	1 44 11.3	41	6 33 38.1	71	9 27 18.9
11	1 54 29.1	42	6 41 28.7	72	9 30 38.0
12	2 04 44.8	43	6 49 11.9	73	9 33 47.0
13	2 14 58.2	44	6 56 47.7	74	9 36 45.4
14	2 25 09.2	45	7 04 15.8	75	9 39 33.3
15	2 35 17.5	46	7 11 36.2	76	9 42 10.6
16	2 45 22.9	47	7 18 48.7	77	9 44 37.3
17	2 55 25.4	48	7 25 53.2	78	9 46 53.3
18	3 05 24.6	49	7 32 49.6	79	9 48 58.6
19	3 15 20.5	50	7 39 37.6	80	9 50 53.1
20	3 25 12.7	51	7 46 17.3	81	9 52 36.8
21	3 35 01.3	52	7 52 48.4	82	9 54 09.7
22	3 44 45.8	53	7 59 10.9	83	9 55 15.2
23	3 54 26.3	54	8 05 24.6	84	9 56 42.8
24	4 04 02.5	55	8 11 29.5	85	9 57 43.0
25	4 13 34.3	55	8 17 25.4	86	9 58 32.3
26	4 23 01.4	57	8 23 12.1	87	9 59 10.7
27	4 32 23.7	58	8 28 49.7	88	9 59 38.1
28	4 41 41.0	59	8 34 18.0	89	9 59 54.5
29	4 50 53.1	60	8 39 36.9	90	10 00 00.0
30	5 00 00.0				

18. Diese polykonische Projektion ist vom Coast Survey Office der Vereinigten Staaten adoptirt worden und wird deshalb auch öfters als amerikanische polykonische Projektion bezeichnet. In dem *Report of the Superintendent of the Coast Survey* vom Jahre 1859 finden sich auch von I. E. Hilgard berechnete Tafeln der Koordinaten x und y.

Bei der Anwendung dieser Projektion zur Darstellung der hydrographischen Arbeiten der Amerikanischen Küstenvermessung handelt es sich nicht um Abbildung eines nach allen Seiten hin ausgedehnten Ländergebietes, sondern nur um Kartirung eines schmalen Küstensaumes. Man fertigt dann für jede Aufnahme eine besondere Karte mit ihrem eignen Mittelmeridian, und diese einzel-

nen Karten sind durch die Fixpunkte einer Triangulation mit einander verbunden.

19. Für Lokalkarten und kleinere hydrographische Aufnahmen wendet das Küstenvermessungs-Amt der Ver.-Staaten eine etwas modificirte Darstellungsweise an, die man als äquidistante polykonische Projektion bezeichnet.

Man konstruirt dann zunächt provisorische Parallelen und Meridiane, trägt aber dann auf jedem der letzteren vom Mittelparallel aus nach Norden und Süden dieselben Theile ab, die auf dem Mittel-Meridian angegeben sind. Durch die auf diese Weise erhaltenen Punkte gleicher Breite legt man dann die definitiven Parallelkreise. Auf die Weise erhält man eine konventionelle Darstellung, bei welcher die Meridianbögen ihre wahre Länge beibehalten.

Es liegt auf der Hand, dass man ohne erhebliche Fehler diese Projektion nicht über grosse Flächenräume ausdehnen darf. Die Amerikanische Küstenvermessung benutzt dieselbe auch nur bis zu Flächen von einem Quadratgrad in einem Maassstabe von höchstens $\frac{1}{10000}$.

20. Eine andere Art der polykonischen Projektion wird vom Topographischen Departement des Englischen Kriegsministeriums zur Darstellung grösserer Theile der Erde angewandt.

Vergl. *Description of the Projektion used in the Topographical Departement of the War Office for maps embracing large portions of the Earth's surface, drawn up by Capt. Clarke, R. E. and communicated by Col. Sir Henry James, R. E. Director of the Topogr. Dep. — Journal of the Royal Geogr. Soc. Vol. XXX. London 1860.*

Diese Projektion führt den Namen rektanguläre polykonische Projektion, weil die Meridiane alle rechte Winkel mit den Abbildungen der Parallelkreise bilden.

Der Aequator und der Mittelmeridian werden wie bei der gewöhnlichen (amerikanischen) polykonischen Projektion gezeichnet und eingetheilt; auch die Parallelkreise werden, wie bei jener Projektion, durch Kreisbogen vom Halbmesser

$$r = a \cot \varphi$$

dargestellt, deren Centra auf dem Mittelmeridian liegen. Aber die Eintheilung der Parallelkreise, oder die Abtragung der Längengrade, erfolgt in anderer Weise.

Denkt man sich zum besseren Verständnisse die verschiedenen Parallelkreise auf einer Halbkugel, etwa von Grad zu Grad angegeben, so zerfällt die ganze Halbkugel in eine Anzahl Zonen. Jede der letztern wollen wir uns annäherungsweise ersetzt denken durch die Mantelfläche eines abgestumpften Kegels, dessen Grundflächen die beiden die Zone begrenzenden Parallelkreisebenen sind. Das System dieser Kegelzonen wollen wir aufschneiden in der Ebene des ersten Meridianes, aber auf der gerade abgewandten Seite, und dann die sämmtlichen Kegelflächen abwickeln. Bei dieser Abwickelung in eine Ebene erhält man nun ein System von Flächen, deren jede von zwei Kreisbogen begrenzt ist, deren gemeinsamer

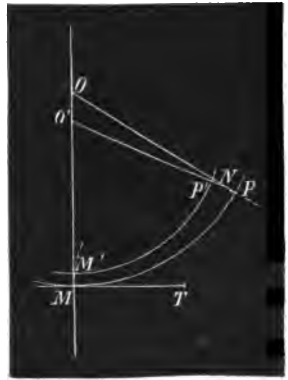
Mittelpunkt das Centrum der betreffenden Kegelfläche ist. Die sämmtlichen Meridiane auf einem solchen Flächenstreifen sind Gerade, die nach dem Centrum der zwei Bogen gehen und letztere in gleiche Theile theilen. Diese Geraden stehen somit auch senkrecht auf den beiden Bogen, welche den Flächenstreifen begrenzen. Die Gesammtheit der Geraden, welche aus den Meridianen einer gewissen Länge, auf den verschiedenen Kegeln sich ergeben, würden nun eine gebrochene Linie bilden, deren Elemente senkrecht stehen auf den Parallelkreisen und jeden derselben in gleiche Theile theilen, und man könnte dann, indem man die Anzahl der Zonen ins Unendliche wachsen lässt, sich der Grenze nähern, so dass jeder Meridian eine stetig gekrümmte Gerade wird, wenn nicht ein Umstand diesem Verfahren entgegenstände. Es ist derselbe Umstand, der sich der Abwickelung der Kugelfläche überhaupt entgegenstellt. Die sämmtlichen Flächenstreifen, welche durch Abwickelung der verschiedenen Kegel erhalten werden, hängen nämlich nur längs des ersten Meridianes zusammen, sind aber übrigens durch Zwischenräume getrennt, so dass also jeder Meridian aus soviel getrennten Stücken besteht, als man Zonen angenommen hat.

Hieraus ergiebt sich, dass die rechtwinklige Lage der Meridiane gegen die Parallelkreise nur gewahrt werden kann, wenn man die gleiche Eintheilung der Parallelkreise in Theile, die den Längenbogen auf der Kugel entsprechen, aufgiebt.

21. Es handelt sich nun darum, die Gestalt der Meridiane näher zu bestimmen. Bei dieser Bestimmung wollen wir uns der Elemente der Infinitesimalrechnung bedienen.

Es sei M (Fig. 59) der Punkt der Karte, in welchem der Parallelkreis von der Breite φ den ersten Meridian schneidet, P sei der Punkt dieses Parallels, welcher der Länge λ entspricht, O sei der Mittelpunkt des Kreises.

Fig. 59.



M', P' und O' mögen dieselben Punkte für den benachbarten Parallelkreis von der Breite $\varphi + d\varphi$ sein, wo $d\varphi$, im Sinne der Differentialrechnung genommen, eine verschwindend kleine Zunahme von φ bezeichnet.

Die beiden Halbmesser OP und $O'P'$ müssen dann die Tangenten der Meridiankurve in den Punkten P und P' sein, und diese Kurve ist bestimmt, wenn man den Winkel $POM = \Theta$ kennt, welchen OP mit dem ersten Meridiane einschliesst; denn P erscheint als Schnittpunkt des bekannten Kreisbogens MP und des Halbmessers OP. Es handelt sich also jetzt um Berechnung des Winkels Θ.

Bezeichnet man nun den Schnittpunkt von OP und $O'P'$ mit N, so ist im Dreiecke $OO'N$ nach dem trigonometrischen Sinus-Satze.

$$OO' : ON = \sin ONO' : \sin OO'N.$$

Hier ist

$$OO' = MO - M'O' - MM'$$
$$= a \cot \varphi - a \cot (\varphi + d\varphi) - a d\varphi$$
$$= a \frac{\cot \varphi - \cot (\varphi + d\varphi)}{d\varphi} d\varphi - a d\varphi$$
$$= \frac{a}{\sin^2 \varphi} d\varphi - a d\varphi = a \cot^2 \varphi \, d\varphi,$$
$$ON = a \cot \varphi,$$
$$ONO' = M'O'N - MON = (\theta + d\theta) - \theta = d\theta$$

und $$\sin ONO' = \sin d\theta = d\theta,$$

endlich $$\sin MON = \sin \theta,$$

so dass man erhält

$$a \cot^2 \varphi \, d\varphi : a \cot \varphi = d\theta : \sin \theta$$

oder $$\cot \varphi \cdot d\varphi = \frac{d\theta}{\sin \theta}.$$

Die Integration dieser Differential-Gleichung liefert das Resultat

$$l \sin \varphi = l \tan \tfrac{1}{2} \theta + C,$$

wo der Buchstabe l, wie früher die natürlichen Logarithmen, C aber die Integrationskonstante bedeutet. Denkt man sich letztere in Form eines negativen Logarithmus

$$C = - l K,$$

und geht man nach dieser Substitution in vorstehender Gleichung von den Logarithmen zu den Zahlen über, so erhält man die Gleichung in der Gestalt

$$K \sin \varphi = \tan \tfrac{1}{2} \theta.$$

Die Bedeutung der Konstanten K erkennen wir leicht auf folgende Weise.

Der Abstand eines Punktes P von dem Mittelmeridian ist durch den Ausdruck

$$OP \cdot \sin \theta = a \cot \varphi \cdot \sin \theta = \frac{2 a \cot \varphi \cdot \tan \frac{1}{2} \theta}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} \theta}$$
$$= 2 a K \frac{\cos \varphi}{1 + K^2 \sin^2 \varphi}$$

gegeben. Setzt man nun $\varphi = 0$, so erhält man für diesen Abstand den Werth

$$2 a K.$$

Da aber auf dem Aequator, für $\varphi = 0$, die Abschnitte in ihrer wahren Grösse abgetragen werden, so ist

$$2 a K = a \lambda$$

und folglich

$$K = \tfrac{1}{2} \lambda,$$

so dass unsere Gleichung zwischen φ und θ nunmehr lautet:

$$\tfrac{1}{2} \lambda \sin \varphi = \tan \tfrac{1}{2} \theta.$$

22. Zur **Konstruktion des Punktes** P von der Breite $\lambda = 2K$, der auf einem gegebenen Parallel von der Breite φ liegt, hat O'Farrell die nachstehende einfache Konstruktion angegeben.

Im Punkte M errichte man auf dem Mittelmeridiane die Senkrechte MT, welcher man die Hälfte der wirklichen Länge des Parallelkreisbogens giebt, welcher durch MP dargestellt werden soll, also

$$MT = \tfrac{1}{2}\, a\lambda \cos\varphi.$$

Setzt man dann den Zirkel in T ein und schlägt mit der Oeffnung TM einen Bogen, so schneidet dieser den von O aus mit der Oeffnung OM geschlagenen Bogen im gesuchten Punkte P. Denn es ist

$$\tan TOM = \frac{MT}{OM} = \frac{\frac{1}{2}\, a\lambda\cos\varphi}{a\cot\varphi} = \tfrac{1}{2}\lambda\sin\varphi = \tan\tfrac{1}{2}\Theta$$

also $TOM = \frac{1}{2}\Theta$ und sonach $POM = \Theta$.

23. Wir wenden uns nun zu der Betrachtung der **Linearvergrösserung** für die verschiedenen Punkte der Karte.

a) Das Bogenelement des Parallelkreises auf der Kugel ist

$$a\,d\lambda\cos\varphi;$$

das entsprechende Element der Karte ist

$$OP\cdot\frac{d\Theta}{d\lambda}\,d\lambda.$$

Nun ist aber

$$\tan\tfrac{1}{2}\Theta = \tfrac{1}{2}\lambda\sin\varphi,$$

woraus folgt

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = \cos^2\tfrac{1}{2}\Theta\sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{1+K^2\sin^2\varphi}.$$

Setzt man noch für OP seinen Werth $a\cot\varphi$, so erhält man für das Bogenelement des Parallelkreises auf der Karte den Werth

$$\frac{a\,d\lambda\cos\varphi}{1+K^2\sin^2\varphi},$$

und sonach ist die **Linearvergrösserung auf dem Parallelkreise**

$$\varkappa' = \frac{1}{1+K^2\sin^2\varphi}.$$

Für $K = 0$, also $\lambda = 0$, und ebenso für $\varphi = 0$, also für den Mittelmeridian und den Aequator, hat $\varkappa'$ stets den Werth 1, sonst aber ist dieses Verhältniss stets ein echter Bruch.

b) Das Meridianelement auf der Kugel ist

$$a\,d\varphi;$$

das entsprechende Element auf der Karte ist PP' (Fig. 59) und möge ds heissen. Nun ist aber in der Figur

$$OP = OO'\cos\Theta + O'P'\cos OBO' + PP';$$

dabei ist $OP = a\cot\varphi$, $OO' = a\cot^2\varphi : d\varphi$, $O'P'\cos OBO' = O'P' = a\cot(\varphi+d\varphi)$ und also

$$PP' = ds = a\cot\varphi - a\cot^2\varphi\cdot d\varphi - a\cot(\varphi+d\varphi),$$

woraus sich nach einigen leichten Umwandlungen ergiebt

$$ds = a\,d\varphi \cdot \frac{1 + K^2 + K^2 \cos^2\varphi}{1 + K^2 \sin^2\varphi}.$$

Sonach ist die Linearvergrösserung im Meridiane

$$\varkappa'' = \frac{1 + K^2 + K^2 \cos^2\varphi}{1 + K^2 \sin^2\varphi}.$$

Dieses Verhältniss hat den Werth 1 für $K = 0$, also $\lambda = 0$, gerade so wie dies für $\varkappa'$ der Fall ist. Für $\varphi = 0$ oder den Aequator ist aber

$$\varkappa'' = 1 + 2K^2,$$

die Linearvergrösserung im Meridiane nimmt also längs des Aequators vom Mittelmeridiane mit wachsender Länge stetig zu von

$$1 \text{ bis } 1 + \frac{\pi^2}{2} = 5{,}9348.$$

24. Endlich gedenken wir noch der Flächenvergrösserung. Diese ist

$$\varkappa' \varkappa'' = \frac{1 + K^2 + K^2 \cos^2\varphi}{(1 + K^2 \sin^2\varphi)^2}.$$

Längs des ersten Meridianes, für $\lambda = 0$, also auch $K = 0$, ist dieselbe der Einheit gleich.

Längs des Aequators ändert sie sich in demselben Verhältnisse wie $\varkappa''$.

Ausserdem hat dieselbe den Werth 1 längs der sphärischen Kurve, die durch die Gleichung

$$1 + K^2 + K^2 \cos^2\varphi = (1 + K^2 \sin^2\varphi)^2$$

oder

$$K^2 \sin^4\varphi + 3 \sin^2\varphi - 2 = 0$$

definirt ist. Diese Kurve schneidet den ersten Meridian rechtwinklig unter 54° 44′ Breite, von da an wendet sie sich südlich, passirt den Meridian von 90° Länge in der Breite von 50° 26′ und erreicht den die Karte begrenzenden Meridian unter 43° 46′ Breite. In allen Punkten auf der Südseite dieser Kurve sind die Flächen vergrössert, nördlich davon aber verkleinert.

25. Da diese Projektion nur zur Darstellung grosser Theile der Erdoberfläche dient, so ist es nicht nöthig, die Abplattung in Betracht zu ziehen.

Auf unserer **Taf. V, Fig. XXV**, ist etwas über die Hälfte der Kugel in dieser Weise dargestellt.

Viertes Kapitel.

Aequivalente Abbildungen.

---

§. 17.

Allgemeine Theorie der äquivalenten Abbildungen.

I. Ableitung der Formeln für die Aequivalenz.

1. Es ist schon in der Einleitung (Seite 4) angegeben worden, dass bei den äquivalenten Abbildungen zwei Flächenstücke auf der Erde in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die ihnen entsprechenden Flächenstücke auf der Karte. Es kommt im Wesentlichen auf dasselbe hinaus und macht nur rücksichtlich des Maassstabes einen Unterschied, wenn wir im Folgenden annehmen, dass jedes Flächenstück der Karte seinem Originale gleich ist.

Indem wir nun im Folgenden die allgemeinen Bedingungen der Aequivalenz, zugleich unter Berücksichtigung der sphäroidischen Form der Erde entwickeln, machen wir ohne Weiteres von den Hilfsmitteln der höhern Analysis Gebrauch; während später, bei Betrachtung einzelner specieller Abbildungsweisen, wieder eine elementare Darstellung eintreten soll.

2. Wir nehmen auf der Oberfläche des Sphäroides zwei unendlich nahe Parallelkreise an, deren Breiten φ und $\varphi + d\varphi$ sein mögen, und ferner zwei Meridiane, welche den verschwindend kleinen Winkel $d\lambda$ einschliessen, deren Längen daher λ und $\lambda + d\lambda$ sein mögen. Durch diese vier Linien wird auf dem Sphäroid ein verschwindend kleines Rechteck begrenzt, dessen Grundlinie und Höhe durch die Bogenelemente des Parallelkreises und des Meridianes dargestellt werden. Ist nun

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

der Halbmesser des Parallelkreises von der Breite φ (vergl. S. 42), so ist das Bogenelement des Parallelkreises

$$r d\lambda = \frac{a \cos \varphi \, d\lambda}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}};$$

und wenn (zufolge S. 24)

$$\varrho = \frac{a (1 - \varepsilon^2)}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}^3}$$

den Krümmungshalbmesser der Meridianellipse in der Breite φ bedeutet, so ist das Bogenelement dieser Ellipse

$$ds = \varrho \, d\varphi = \frac{a (1 - \varepsilon^2) \, d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}^3}.$$

Sonach ist das Flächenelement auf dem Sphäroid

$$(1) \qquad r d\lambda \cdot ds = \frac{a^2 (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2}.$$

Den vier Punkten auf der Oberfläche des Sphäroides, welche die Ecken des erwähnten Rechteckes bilden und die Koordinaten

$$\begin{array}{llll} \varphi, & \lambda & \varphi + d\varphi, & \lambda \\ \varphi, & \lambda + d\lambda & \varphi + d\varphi, & \lambda + d\lambda \end{array}$$

besitzen, entsprechen nun auf der Karte vier Nachbarpunkte, welche wir uns durch ihre rechtwinkligen Koordinaten bestimmt denken wollen. Wenn wir aber annehmen, dass einem Punkte des Sphäroides mit den Koordinaten φ, λ ein Punkt der Karte mit den Koordinaten x, y entspricht, so werden den oben erwähnten vier Eckpunkten des sphäroidischen Flächenelementes auf der Karte vier Punkte entsprechen, deren Koordinaten

$$(2) \left\{ \begin{array}{ll} x, \quad y; & x + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi, \quad y + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi; \\ x + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda, \quad y + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda; & x + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda, \quad y + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \end{array} \right.$$

sind, wo in üblicher Weise durch den Buchstaben ∂ ein partielles Differential angedeutet wird, während d ein totales Differential bedeutet.

Es gilt nun die Fläche des Viereckes zu ermitteln, welches durch die vier Punkte der Karte bestimmt wird. Wenn aber

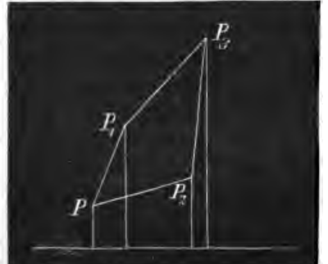
$$\begin{array}{ll} P & P_1 \\ P_2 & P_3 \end{array}$$

vier Punkte und

$$\begin{array}{ll} x, y & x_1, y_1 \\ x_2, y_2 & x_3, y_3 \end{array}$$

ihre rechtwinkligen Koordinaten sind, so findet man durch Zerlegung in Trapeze mittels der rechtwinkligen Ordinaten (vergl. die Fig. 60) für die Fläche des Viereckes $P P_1 P_3 P_2$ die Formel

Fig. 60.



$$\tfrac{1}{2}(x_1 - x)(y + y_1) + \tfrac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3)$$
$$- \tfrac{1}{2}(x_2 - x)(y + y_2) - \tfrac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_3 + y_2).$$

Wendet man diese Formel auf die Koordinatengruppe (2) an, so ergiebt sich für das Flächenelement der Karte der Ausdruck

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi - \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} \cdot d\lambda. \tag{3}$$

Die nothwendige und hinreichende Bedingung der Aequivalenz ist nun die, dass jedes Flächenelement der Karte zu dem entsprechenden Flächenelemente der Karte in einem festen, von den Koordinaten unabhängigen Verhältnisse steht. Man ändert nur den Maassstab der Karte, wenn man den Werth dieses Verhältnisses mit einem anderen vertauscht. Deshalb wollen wir diesen Werth gleich Eins annehmen und also die Formeln (1) und (3) einander gleich setzen. Wenn wir dann noch beiderseits den Faktor $d\varphi\, d\lambda$ weglassen, so erhalten wir als Bedingung der Aequivalenz die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{a^2 (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2}. \tag{4}$$

2. Die Koordinaten x und y sind im Allgemeinen Funktionen von φ und λ, und zwar kann man die eine derselben willkürlich wählen.

Setzt man demgemäss

$$x = F(\lambda, \varphi), \tag{5}$$

so sind auch die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = p \quad \text{und} \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = q \tag{6}$$

bekannte Funktionen von λ und φ. Mit Einführung der Grössen p und q und wenn man die rechte Seite der Kürze wegen mit ω bezeichnet, geht die Gleichung (4) über in

$$p \frac{\partial y}{\partial \varphi} - q \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \omega. \tag{7}$$

Multiplicirt man dieselbe mit $d\varphi$, so erhält man

$$p \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi - q \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\varphi = \omega\, d\varphi. \tag{8}$$

Man setzt nun

$$p\, d\lambda + q\, d\varphi = 0,$$

und wenn man diese Gleichung mit $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$ multiplicirt und dann zur Gleichung (8) addirt, so entsteht

$$p \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \right) = \omega\, d\varphi.$$

Hier ist aber der Faktor von p identisch mit dem totalen Differential dy und man hat daher

$$p\, dy = \omega\, d\varphi$$

oder

$$dy = \frac{\omega}{p}\, d\varphi$$

und die Integration giebt

$$y = C + \int \frac{\omega}{p}\, d\varphi.$$

Da die Integrationskonstante C nur von φ unabhängig sein muss, so kann sie im Allgemeinen eine willkürliche Funktion von x, $f(x)$, sein. Man kann daher als Bedingung der Aequivalenz statt (4) die beiden Gleichungen

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= F(\lambda, \varphi) \\ y &= f(x) + \int \frac{a^2 (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}} \end{aligned} \right.$$

aufstellen.

Man sieht aus diesen Formeln, dass die Aufgabe auf unzählige Arten lösbar ist, und dass, wenn man eine Lösung

$$x = F(\lambda, \varphi), \quad y = F_1(\lambda, \varphi)$$

kennt, man unendlich viele Lösungen daraus ableiten kann, indem man statt $F_1(\lambda, \varphi)$ für y die Summe $f(x) + F_1(\lambda, \varphi)$ setzt.

II. Beispiele zur Erläuterung.

3. Als ein Beispiel für die Anwendung dieses Verfahrens betrachten wir die Annahme

$$x = a\lambda;$$

aus ihr folgt

$$p = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = a$$

und also

$$y = a(1 - \varepsilon^2) \int \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2}.$$

Durch die Substitution $\sin \varphi = z$ geht das Integral über in

$$\int \frac{dz}{(1 - \varepsilon^2 z^2)}.$$

Nun ist aber

$$d\left(\frac{z}{2(1 - \varepsilon^2 z^2)}\right) = \frac{dz}{(1 - \varepsilon^2 z^2)^2} - \frac{dz}{2(1 - \varepsilon^2 z^2)}$$

und daher ist auch umgekehrt

$$\frac{z}{2(1 - \varepsilon^2 z^2)} = \int \frac{dz}{(1 - \varepsilon^2 z^2)^2} - \tfrac{1}{2} \int \frac{dz}{1 - \varepsilon^2 z^2}$$

oder

$$\int \frac{dz}{(1 - \varepsilon^2 z^2)^2} = \frac{z}{2(1 - \varepsilon^2 z^2)} + \tfrac{1}{2} \int \frac{dz}{1 - \varepsilon^2 z^2}$$

$$= \frac{z}{2(1 - \varepsilon^2 z^2)} + \frac{1}{4\varepsilon}\, l\, \frac{1 + \varepsilon z}{1 - \varepsilon z}.$$

Setzt man schliesslich wieder sin φ für z, so erhält man

$$y = C + a\,(1 - \varepsilon^2)\left[\frac{\sin\varphi}{2(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)} + \frac{1}{4\varepsilon}\,l\,\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right].$$

Im Betreff der Konstanten C ist nun die einfachste Annahme offenbar die, dass für $\varphi = 0$ auch $y = 0$ ist, woraus folgt $C = 0$. Die Projektion ist dann durch die beiden Gleichungen definirt

$$(10)\quad \begin{cases} x = a\lambda \\ y = a\,(1 - \varepsilon^2)\left[\dfrac{\sin\varphi}{2\,(1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi} + \dfrac{1}{4\varepsilon}\,l\,\dfrac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi}\right]. \end{cases}$$

Da

$$\frac{1}{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi} = 1 + \varepsilon^2\sin^2\varphi + \varepsilon^4\sin^4\varphi + \ldots$$

und

$$\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1+\varepsilon\sin\varphi}{1-\varepsilon\sin\varphi} = \varepsilon\sin\varphi + \tfrac{1}{3}\,\varepsilon^3\sin^3\varphi + \tfrac{1}{5}\,\varepsilon^5\sin^5\varphi + \ldots$$

ist, so kann man mit Vernachlässigung höherer Potenzen von ε als der dritten für y auch schreiben

$$y = a\,(1 - \varepsilon^2)\,(\sin\varphi + \tfrac{2}{3}\,\varepsilon^2\sin^3\varphi)$$

oder auch

$$(11)\qquad y = a\sin\varphi - a\varepsilon^2\sin\varphi\,[1 - \tfrac{2}{3}\sin^2\varphi].$$

Für den Fall der Kugel, also $\varepsilon = 0$, wird einfach

$$y = a\sin\varphi$$

und man hat dann die bereits auf S. 113 betrachtete Lambert'sche Projektion. Die Formeln (10) geben die Erweiterung dieser Projektion für das Sphäroid.

4. Ein anderes einfaches Beispiel liefert uns die Annahme

$$(12)\qquad x = r\lambda = \frac{a\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}}.$$

Unter dieser Voraussetzung ist

$$p = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$

und folglich

$$y = a\,(1 - \varepsilon^2)\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi^3}}.$$

Zu einer einfacheren Darstellung dieses Integrales gelangt man durch Differentiation des Ausdruckes

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$

nach φ; man findet

$$d\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\varepsilon^2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}},$$

und daraus ergiebt sich, wenn man integrirt,

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}^3} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \int \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi} \cdot d\varphi$$
$$- \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}.$$

Sonach erhält man für y den Werth

$$(12a) \quad y = a \int \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi} \cdot d\varphi - \frac{a\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}.$$

Das hier stehende Integral lässt sich nicht in geschlossener Form angeben, es ist ein elliptisches Integral zweiter Ordnung und man schreibt nach Legendre

$$\int \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi} \cdot d\varphi = E(\varepsilon, \varphi).$$

Für unseren Zweck ist es indessen unnöthig, darauf weiter einzugehen; es reicht aus, den zu integrirenden Ausdruck in eine Reihe zu verwandeln, von der die ersten beiden Glieder allein beibehalten, die übrigen aber, die die vierte und noch höhere Potenzen von ε enthalten würden, weggelassen werden. Man erhält so

$$\int \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi} \cdot d\varphi = \int d\varphi \, [1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2\varphi]$$
$$= \int d\varphi \, [1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 + \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \cos 2\varphi]$$
$$= (1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2)\varphi + \tfrac{1}{8}\varepsilon^2 \sin 2\varphi,$$

und da ausserdem mit Vernachlässigung der vierten und höherer Potenzen von ε das zweite Glied der rechten Seite von (12a) den Werth hat

$$\frac{a\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}} = a\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi = \tfrac{1}{2} a\varepsilon^2 \sin 2\varphi,$$

so nimmt, unter der Voraussetzung dass die Integrationskonstante $= 0$ ist, y den Werth an

$$(13) \qquad y = a(1 - \tfrac{1}{4}\varepsilon^2)\varphi - \tfrac{3}{8} a\varepsilon^2 \sin 2\varphi.$$

Für den Fall der Kugel, für $\varepsilon = 0$, gehen die beiden Formeln (12) und (13) über in die einfacheren

$$(14) \qquad x = a\lambda \cos\varphi \text{ und } y = a\varphi.$$

Wir haben es also mit der schon auf S. 160 behandelten Sanson-Flamsteed'schen Projektion zu thun.

III. Abbildungen bei denen die Parallelkreise durch parallele Gerade dargestellt werden.

5. Man kann auch versuchen, die beiden willkürlichen Funktionen F und f der allgemeinen Lösung in Gleichung (9) derart zu bestimmen, dass die Abbildungen der Parallelkreise oder Meridiane oder beider gewisse, im Voraus bekannte Linien werden.

Wenn man z. B. die Parallelkreise durch parallele Gerade dargestellt wünscht, so muss y eine Funktion sein, die lediglich von der Breite φ abhängt. Man wird also in der zweiten Gleichung (9)

$$f(x) = 0$$

und

$$y = G(\varphi)$$

setzen, wo G eine beliebige Funktion bedeutet. Differentiirt man letztere Gleichung, so erhält man

$$\frac{dy}{d\varphi} = G'(\varphi),$$

und da der zweiten Gleichung (9) zufolge

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2} \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}$$

ist, so erhält man zur Bestimmung von x die Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2\, G'(\varphi)},$$

aus welcher folgt

$$x = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\lambda\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2\, G'(\varphi)} + C,$$

wo C eine von λ unabhängige Konstante bedeutet. Will man, dass für $\lambda = 0$ auch $x = 0$ sei, so muss man $C = 0$ nehmen und die Lösung des Problemes wird dann ausgedrückt durch die beiden Gleichungen

$$(15) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a^2(1-\varepsilon^2)\lambda\cos\varphi}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2\, G'(\varphi)} \\ y = G(\varphi). \end{cases}$$

Für den Fall einer Kugel, also für $\varepsilon = 0$, geht die erste dieser Gleichungen über in

$$(15b) \qquad x = \frac{a^2\lambda\cos\varphi}{G'(\varphi)}.$$

Vergleicht man zwei Meridiankurven, etwa die zur Länge λ und zur Länge λ' gehörigen, mit einander, so sieht man, dass die Ordinaten y, die zur Breite φ gehören, für die Kurven gleich sind und dass die Abscissen sich verhalten wie die Längen λ und λ'. Die Ausdehnung nach der einen Richtung, der Richtung der y, ist also bei allen Kurven dieselbe, während die Dimensionen zweier Kurven in der senkrechten Richtung, derjenigen der x, in einem bestimmten festen Verhältnisse ($\lambda : \lambda'$) stehen. Solche Kurven nennt man affin; die Sanson-Flamsteed'sche Projektion giebt uns ein Beispiel dafür.

6. Ein anderes Beispiel erhalten wir, wenn wir die Meridian-Kurven von elliptischer Form voraussetzen. Es sei n die in Richtung der y liegende gemeinschaftliche Halbachse dieser Ellipsen, m dagegen die in Richtung der x liegende Halbachse der Meridianellipse von der Länge λ. Nehmen wir dabei die Erde als kugelförmig an, so hat das sphäroidische Zweieck zwischen den beiden Meridianen von der Länge $\pm\lambda$ die Fläche $4a^2\lambda$, und da dieses Flächenstück durch die Ellipsenfläche von den Halbachsen m und

n dargestellt wird, welche nach S. 27 den Werth $mn\pi$ hat, so besteht die Gleichung

(16) $$mn\pi = 4a^2\lambda.$$

Die Gleichung der Ellipse ist ferner (S. 14)

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1$$

und da

$$\frac{x}{m} = \frac{a^2\lambda \cos\varphi}{m\,G'(\varphi)} = \frac{a^2\lambda \cos\varphi\, d\varphi}{m\,dy}$$

ist, so ergiebt sich

$$\left(\frac{a^2\lambda \cos\varphi\, d\varphi}{m\,dy}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

woraus folgt

$$a^2 n\lambda \cos\varphi\, d\varphi = m\,dy\,\sqrt{n^2 - y^2}.$$

Weil ferner

$$\int dy\,\sqrt{n^2 - y^2} = \tfrac{1}{2}\,y\,\sqrt{n^2 - y^2} + \tfrac{1}{2}\,n^2 \operatorname{Arcsin}\frac{y}{n}$$

ist, so gelangt man durch Integration vorstehender Gleichung zu dem Resultate

(17) $$2\,a^2 n\lambda \sin\varphi = my\,\sqrt{n^2 - y^2} + mn^2 \operatorname{Arcsin}\frac{y}{n}.$$

Die Integrationskonstante ist hier gleich Null angenommen, damit für $\varphi = 0$ auch $y = 0$ werde.

Man kann die Gleichung (17) durch eine einfachere ersetzen, wenn man um den Mittelpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser n beschreibt und den Punkt, in welchem der Parallelkreis von der Breite φ diesen Kreis schneidet, durch einen Halbmesser mit dem Mittelpunkte verbindet. Bezeichnet χ den Winkel, den dieser Halbmesser mit der Achse der x bildet, so ist

$$y = n \sin\chi$$

und die Gleichung (17) geht nun, wenn man beiderseits den Faktor n weglässt, über in

$$2\,a^2\lambda \sin\varphi = mn \sin\chi \cos\chi + mn\,\chi.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit π und setzt dann $4a^2\lambda$ an die Stelle von $mn\pi$ [vergl. Gl. (16)], so bleibt nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $2a^2\lambda$ noch die Gleichung übrig

$$\pi \sin\varphi = 2 \sin\chi \cos\chi + 2\chi$$

oder

(18) $$\pi \sin\varphi = \sin 2\chi + 2\chi.$$

Diese Projektion, bei welcher alle Parallelkreise durch parallele Gerade und alle Meridiane durch Ellipsen dargestellt werden, rührt von dem deutschen Mathematiker C. B. Mollweide (geb. 1774, gest. 1825) her. Vergleiche dessen Abhandlung im Augustheft 1805 von Zach's monatl. Korrespondenz: „Ueber die von Prof. Schmidt in Giessen in der zweiten Abth. seines Handb. der Na-

turlehre S. 595 angegebene Projektion der Halbkugelfläche." Weitere Verbreitung hat ihr indessen erst der französische Gelehrte Jacques Babinet (geb. 1794, gest. 21. Oktober 1872) verschafft, der sie 1857 unter dem Namen homalographische Projektion (vom griechischen ὁμαλὸς, gleich) empfohlen hat. Vergl. *I. Babinet, Mappe-Monde. Système homalographique. Paris. E. Bourdin.* Wir werden gleich näher auf diese Projektion zurückkommen; auf **Taf. V** zeigt **Fig. XXVII** ihre Anwendung für Darstellung der ganzen Erdoberfläche.

7. Ein anderes Beispiel einer Projektion mit geradlinigen und parallelen Abbildungen der Parallelkreise bietet, wenn wir die S. 113 erwähnte Lambert'sche Projektion übergehen, die sogenannte stereographisch-äquivalente des Geniekapitäns Prépetit-Foucaut. Dieselbe hat ihren Namen daher, dass die Schnittpunkte des ersten Meridianes mit den verschiedenen Parallelkreisen dieselben Abstände unter einander haben, wie bei der stereographischen Meridianprojektion (vergl. S. 63 u. f.). Es ist also hier

$$y = 2a \tan \frac{\varphi}{2}, \tag{19}$$

wenn man den Fall einer Kugel ins Auge fasst. Mithin ist

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{a}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

und da zufolge der zweiten Gleich. (9)

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{a^2 \cos \varphi}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}$$

ist, so erhält man

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = a \cos \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

und mithin

$$x = a\lambda \cos \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \tag{20}$$

Diese Projektion ist der Formel (19) wegen nicht geneigt zur Darstellung der ganzen Erdoberfläche. Versuchen wir deshalb die Halbkugel darzustellen, so erhalten wir für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ den Werth $y_1 = 2a$; dagegen für $\varphi = 0$ und $\lambda = \frac{\pi}{2}$ den Werth $x_1 = a \frac{\pi}{2}$.

Man kann die Darstellung leicht so abändern, dass die beiden Hauptdimensionen x_1 und y_1 gleich gross werden, sowie auf der Kugel der Meridianquadrant gleich ist dem Aequatorquadranten. Zu dem Zwecke multipliciren wir x mit einem Faktor k und dividiren y mit demselben Faktor. Jedes Flächenelement wird dann in Richtung der x im Verhältnisse $1 : k$ vergrössert und in der Richtung der y im Verhältnisse $k : 1$ verkleinert, seine Fläche bleibt also ungeändert. Die beiden Werthe x_1 und y_1 werden aber

$$x_1 = a\frac{\pi}{2}\cdot k \text{ und } y_1 = \frac{2a}{k};$$

sollen nun dieselben einander gleich sein, so muss

$$k^2 = \frac{4}{\pi}, \text{ also } k = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

sein, und man hat dann statt (19) und (20) die Gleichungen

$$(21)\quad \begin{cases} y = a\sqrt{\pi}\tan\frac{\varphi}{2} \\ x = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}\lambda\cos\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Es ist leicht, aus diesen Formeln die Werthe von y und x zu berechnen, indessen ist die ganze Methode kaum so wichtig, dass wir länger dabei zu verweilen haben.

8. Eine andere, hierher gehörige Form der Darstellung erhalten wir, wenn wir die Abbildungen der Meridiane als gerade Linien voraussetzen, die von einem Punkte ausgehen. Die Erde als eine Kugel annehmend haben wir dann zunächst die Gleichungen (15)

$$y = G(\varphi) \text{ und } x = \frac{a^2\lambda\cos\varphi}{G'(\varphi)} = \frac{a^2\lambda\cos\varphi}{dy}d\varphi.$$

Bezeichnet man ferner mit b die Ordinate des gemeinsamen Durchschnittspunktes der Abbildungen aller Meridiane, so hat die Gleichung eines solchen Meridianes von der Länge λ die Form

$$x = (y - b)\,H(\lambda),$$

wo H eine Funktion ist, die nur von λ abhängt. Setzt man aber für x den vorstehenden Werth, so ergiebt sich

$$\frac{a^2\lambda\cos\varphi\,d\varphi}{dy} = (y - b)\,H(\lambda),$$

und aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass $H(\lambda)$ Nichts weiter ist, als eine Konstante, multiplicirt mit λ, etwa

$$H(\lambda) = m\lambda.$$

Durch Substitution dieses Werthes in die vorige Gleichung erhält man, nachdem man den Faktor λ beiderseits weggelassen,

$$a^2\cos\varphi\,d\varphi = m(y - b)\,dy$$

und durch Integration dieser Gleichung kommt man zu dem Resultate

$$a^2\sin\varphi = my\left(\tfrac{1}{2}y - b\right).$$

Eine Integrationskonstante ist nicht hinzugefügt worden, damit für $\varphi = 0$ auch $y = 0$ werde.

Da für $\varphi = 90^0$ die Ordinate y den Werth b annimmt, so hat man zur Bestimmung von m die Gleichung

$$a^2 = -\tfrac{1}{2}mb^2, \text{ also } m = -2\frac{a^2}{b^2}.$$

Sonach haben die beiden Gleichungen der Projektion die Form

$$(22) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2a^2}{b^2}(b - y)\,\lambda \\ (2b - y)\,y = b^2 \sin \varphi. \end{cases}$$

E. Collignon hat vorgeschlagen die Konstante b so zu wählen, dass die Halbkugel, die im Allgemeinen immer ein Rhombus wird, eine quadratische Form annimmt. Zu diesem Zwecke ist nothwendig, dass für $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 0$ die Abscisse x den Werth $\pm b$ erhält. Da $y = 0$, so giebt uns die erste der Gleichungen (22) den Werth

$$b = a\sqrt{\pi}$$

und an die Stelle der Gleichungen (22) treten nun die folgenden

$$(23) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2\lambda}{\pi}(a\sqrt{\pi} - y) \\ y^2 - 2a\sqrt{\pi}\cdot y + a^2\pi \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Aus der letzten ergiebt sich der Doppelwerth

$$y = a\sqrt{\pi}\left[1 \pm \sqrt{2}\sin\frac{90^0 - \varphi}{2}\right].$$

Da aber dem Sinne der Darstellungsweise gemäss y immer kleiner als $a\sqrt{\pi}$ sein muss, so hat man nur das untere Zeichen zu nehmen und es ist also

$$(24) \qquad y = a\sqrt{\pi}\left[1 - \sqrt{2}\sin\frac{90^0 - \varphi}{2}\right].$$

Mittels dieser Gleichungen kann man leicht die Karte zeichnen, die auf **Taf. V, Fig. XXVIII** dargestellt ist.

Zunächst trägt man auf jeder der beiden senkrechten Geraden, die man durch den Mittelpunkt O der Karte gezogen, die Strecke $a\sqrt{\pi}$ ab und erhält so die Punkte Q und Q_1, die Abbildungen der Pole, und die Punkte A und A_1 des Aequators von der Länge $\lambda = \pm \frac{\pi}{2}$.

Theilt man dann AA_1 in 18 gleiche Theile und verbindet die Theilpunkte mit Q und Q_1, so erhält man die Meridiane von 10 zu 10 Grad Länge.

Um die Punkte zu erhalten, in denen der erste Meridian QQ_1 von den Parallelkreisen geschnitten wird, errichte man senkrecht auf QA eine Gerade $QC = a\sqrt{\pi}$ und schlage um Q als Mittelpunkt den Viertelkreis CD. Ist dann der Bogen DE gleich der Breite φ, so halbire man den komplementären Bogen CE in F und ziehe durch F eine Parallele zu CQ, welche OQ in G schneidet. Eine durch G parallel zu AA_1 gezogene Gerade repräsentirt dann den Parallelkreis von der Breite φ. Denn wenn CC' senkrecht auf FG und CC'' parallel zu QO gezogen wird, so ist

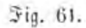
$$CC' = QC \sin\frac{90^0 - \varphi}{2} = a\sqrt{\pi}\sin\frac{90^0 - \varphi}{2},$$

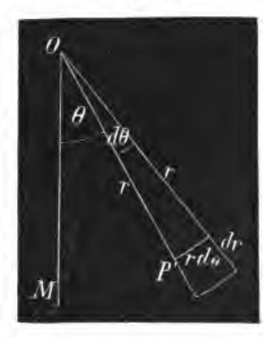
$$\angle C''CC' = 45^0, \text{ also } C'C'' = CC',$$

folglich $$CC'' = \sqrt{2}\, a \sqrt{\pi} \sin \frac{90^0 - \varphi}{2}$$

und $$OG = OQ - CC'' = a\sqrt{\pi}\left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{90^0 - \varphi}{2}\right).$$

IV. Abbildungen, bei denen die Parallelkreise durch koncentrische Kreise dargestellt werden.


Fig. 61.



9. Es sei O in Fig. 61 der Mittelpunkt aller koncentrischen Kreise und der Punkt P', welcher auf der Karte dem Punkte P von der Länge λ und der Breite φ auf dem Sphäroide entspricht, werde bestimmt durch den Radius $OP' = r$ und den Winkel Θ, den dieser mit einer festen Achse OM bildet. Das Flächenelement, welches zwischen zwei Kreisen mit den Halbmessern r und $r + dr$ einerseits und zwei Radien mit den Anomalien Θ und $\Theta + d\Theta$ andererseits eingeschlossen wird, kann dann als ein Rechteck von der Basis $r d\Theta$ und der Höhe dr betrachtet und durch die Formel

$$rdr\, d\Theta$$

dargestellt werden. Indem man diesen Werth dem Werthe des Flächenelementes auf dem Sphäroid, Gleichung (1) dieses Paragraphen, gleichsetzt, erhält man die Differentialgleichung

$$(25) \qquad rdr\, d\Theta = - \frac{a^2 (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi \, d\lambda \, d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2}.$$

Das Minuszeichen, welches hier rechts beigefügt worden ist, rechtfertigt sich durch die Bemerkung, dass mit wachsenden Werthen von φ der Radius r kleiner wird.

Da aber jeder Parallelkreis durch einen Kreis um O dargestellt wird, so ist

$$(26) \qquad r = F(\varphi),$$

wo F eine nur von φ, nicht aber von λ abhängige, beliebige Funktion bedeutet.

Aus (25) folgt aber

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} = - \frac{a^2 (1 - \varepsilon^2) \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2 \, r \cdot \frac{dr}{d\varphi}},$$

aus welcher Gleichung in Verbindung mit (26) sich ergiebt, dass $\frac{d\Theta}{d\lambda}$ nur von φ, nicht von λ abhängt. Hieraus folgt

$$(27) \qquad \Theta = - \frac{a^2 (1 - \varepsilon^2) \lambda \cos \varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2 \, r \cdot \frac{dr}{d\varphi}} + f(\varphi),$$

wo die Integrationskonstante $f(\varphi)$ eine ganz beliebige Funktion von φ ist, die wir indessen gleich Null setzen dürfen, wenn wir annehmen, dass für $\varphi = 0$ auch $\Theta = 0$ ist.

Die Gleichungen (26) und (27) sind die Fundamentalgleichungen der Darstellungsweise.

Wir wenden uns jetzt zu einigen Beispielen.

10. Die einfachste Annahme ist

$$r = m + n\varphi, \tag{28}$$

wo m und n Konstante sind. Unter der Voraussetzung $f(\varphi) = 0$ wird dann

$$\Theta = \frac{a^2(1-\varepsilon^2)\lambda\cos\varphi}{n(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^2 r},$$

und wenn wir endlich noch den besonderen Fall der Kugel, $\varepsilon = 0$, in Betracht ziehen, so ist

$$\Theta = \frac{a^2\lambda\cos\varphi}{nr}. \tag{29}$$

Die Konstanten m und n der Gleichungen (28) und (29) können auf verschiedene Weise bestimmt werden.

11. Man kann die Bedingung stellen, dass die Abbildung des Poles der Mittelpunkt der verschiedenen Kreise werde, welche die Parallelkreise repräsentiren.

Dann muss in (28) für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ der Halbmesser r den Werth Null erhalten; dies giebt

$$m = -n\frac{\pi}{2}$$

und an die Stelle von (28) tritt

$$r = n\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

oder mit Umkehrung des Vorzeichens, da nur der absolute Werth von r in Betracht kommt

$$r = n\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right). \tag{28b}$$

Die einfachste Annahme rücksichtlich der Konstanten n ist $n = a$. Dann sind die Gleichungen der Projektion

$$r = a\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \text{ und } \Theta = \frac{\lambda\cos\varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi}.$$

Der Radius des Parallelkreises auf der Karte ist also gleich dem Meridianbogen, der auf der Kugel zwischen dem Parallelkreise und der Kugel liegt; und da die zweite der vorstehenden Gleichungen sich auch in der Form

$$r\Theta = a\lambda\cos\varphi$$

schreiben lässt, so sind alle Längengrade in ihrer wahren Grösse dargestellt.

Die Darstellung ist, wie man sofort bemerkt, keine andere, als die bereits auf Seite 162 besprochene und auf **Taf. IV, Fig. XXIV** dargestellte, von Johann Werner in Nürnberg (1468 — 1528) herrührende. Eine grosse Verwendbarkeit besitzt dieselbe übrigens nicht, weil sie die Formen zu stark verzerrt; so sind z. B. die Abbildungen der Meridiane nur in der Nähe des Poles ungefähr rechtwinklig auf den Parallelkreisen, weiterhin wird der Winkel zwischen beiden aber kleiner. Daher kann man nur die Umgebung des Poles ohne zu grosse Verzerrung auf diese Weise darstellen.

12. Man kann die Konstanten der Gleichung (28) auch so bestimmen, dass für einen bestimmten Werth φ_1 von φ der Halbmesser r eine vorgeschriebene Grösse r_1 hat. Dies giebt

$$r_1 = m + n\varphi_1,$$

und wenn man diese Gleichung von (28) abzieht, so ergiebt sich

$$r = r_1 + n(\varphi - \varphi_1).$$

Wenn man für den Fall der kugelförmigen Erde

$$r_1 = a \cot \varphi_1 \text{ und } n = -a$$

setzt, so wird

$$r = a \cot \varphi_1 + a(\varphi_1 - \varphi).$$

Dies ist die schon S. 159 erwähnte Bonne'sche Projektion, die wir gleich noch näher betrachten werden.

13. Man kann die Funktion $F(\varphi)$ in (26) auch so bestimmen, dass die Meridiane und Parallelkreise auf der Karte sich rechtwinklig schneiden.

Dann müssen die Meridiane gerade Linien sein, die für gleiche Länge unterschieden auch gleich geneigt sind gegen einander. Man kann also setzen

$$\theta = \frac{\lambda}{m},$$

und wenn man in (27) $f(\varphi) = 0$ und $\varepsilon = 0$ setzt, so erhält man für θ den Werth

$$\theta = -\frac{a^2 \lambda \cos \varphi}{r \dfrac{dr}{d\varphi}}.$$

Aus diesen zwei Formeln folgt

$$r\,dr = -a^2 m \cos \varphi \, d\varphi,$$

und die Integration dieser Differentialgleichung giebt

$$\tfrac{1}{2} r^2 = C - m a^2 \sin \varphi.$$

Soll für $\varphi = 90^0$ auch der Radius $r = 0$ sein, so erhält man

$$0 = C - m a^2,$$

und mithin

$$r^2 = 2 m a^2 (1 - \sin \varphi)$$

oder

$$r = 2a \sqrt{m} \sin \frac{90^0 - \varphi}{2}.$$

Die zwei Gleichungen der Projektion sind also

$$(29) \qquad \theta = \frac{\lambda}{m} \text{ und } r = 2a\sqrt{m} \sin \frac{90^0 - \varphi}{2}.$$

14. Die Konstante m kann auf verschiedene Art bestimmt werden.

Stellt man die Forderung, dass auf dem mittleren Parallelkreise von der Breite φ_1 die Längengrade in ihrer wahren Grösse dargestellt werden, so hat man die Gleichung

$$r_1 \theta = r_1 \frac{\lambda}{m} = a \lambda \cos \varphi_1,$$

wo

$$r_1 = 2a\sqrt{m} \sin \frac{90^0 - \varphi_1}{2}$$

ist. Aus diesen Gleichungen folgt für m der Werth

$$(30) \qquad m = \sec^2 \frac{90^0 - \varphi_1}{2}.$$

Nimmt man z. B. $\varphi_1 = 45^0$, so wird $m = 2(2 - \sqrt{2}) = 1{,}1715728$. Auf **Taf. IV** in **Fig. XX** ist auf diese Weise die ganze Oberfläche der Erde dargestellt; die äussersten Meridiane schliessen einen Winkel von etwa $307^0\ 25'$ ein.

Die Darstellungsweise rührt von Lambert her (vergl. S. 151) und ist von A. Germain mit dem Namen isosphärische stenotere Projektion belegt worden. *(Traité des Projections etc. pag. 101).*

Wenn man dagegen die Annahme $m = 1$ macht, so sind die Neigungen der Meridiane gegen einander auf der Karte konservirt und man hat die Gleichungen

$$(31) \qquad \theta = \lambda,\ r = 2a \sin \frac{90^0 - \varphi}{2}.$$

Diese Projektion rührt ebenfalls von Lambert her und hat von Germain a. a. O. den Namen isomere Projektion erhalten (*ἰσομερής* gleichtheilig, im Gegensatze zu *στενότερος* enger, weil bei dieser Projektion λ in wahrer Grösse dargestellt, bei voriger aber verkleinert wird). Uebrigens hat die Konstruktion des Netzes mit Hilfe der Bemerkung im Anfange der Nr. 27 des §. 15, S. 152, keine Schwierigkeit.

15. Man kann aber die beiden Konstanten C und m der Gleichung auf voriger Seite

$$(32) \qquad \tfrac{1}{2} r^2 = C - m a^2 \sin \varphi$$

auch so bestimmen, dass für zwei bestimmte Parallelkreise von den Breiten φ' und φ'' die Längengrade in ihrer wahren Grösse dargestellt werden.

Bezeichnet man mit r' und r'' die Werthe, welche r für $\varphi = \varphi'$ und $\varphi = \varphi''$ annimmt, so muss

$$r' \theta = a\lambda \cos \varphi' \text{ und } r'' \theta = a\lambda \cos \varphi''$$

oder da $\lambda = m\theta$ ist,

$$r' = am \cos \varphi' \text{ und } r'' = am \cos \varphi'' \tag{33}$$

sein. Aus Gleichung (32) folgt aber

$$r' = \sqrt{2C - 2ma^2 \sin \varphi'}, \; r'' = \sqrt{2C - 2ma^2 \sin \varphi''}$$

und wenn man diese Werthe von r' und r'' in (33) einsetzt, so erhält man zur Bestimmung von C und m die Gleichungen

$$2C = ma^2 (m \cos^2 \varphi' + 2 \sin \varphi')$$
$$2C = ma^2 (m \cos^2 \varphi'' + 2 \sin \varphi''),$$

aus denen folgt

$$m = \frac{2(\sin \varphi'' - \sin \varphi')}{\cos^2 \varphi' - \cos^2 \varphi''}$$

und folglich

$$\frac{1}{m} = \sin \frac{\varphi'' + \varphi'}{2} \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}. \tag{34}$$

Demnach ist nun weiter zufolge (33)

$$\left\{ \begin{aligned} r' &= \frac{a \cos \varphi'}{\sin \frac{\varphi'' - \varphi'}{2} \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}} \\ r'' &= \frac{a \cos \varphi''}{\sin \frac{\varphi'' + \varphi'}{2} \cos \frac{\varphi'' - \varphi'}{2}}. \end{aligned} \right. \tag{35}$$

Zieht man ferner die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} r''^2 = C - ma^2 \sin \varphi''$$

von (32) ab, so erhält man zur Berechnung von r die Formel

$$r^2 = r''^2 + 2ma^2 (\sin \varphi'' - \sin \varphi). \tag{36}$$

Wir haben es mit der schon auf S. 148 behandelten Projektion von Albers zu thun, die Gleichungen (34) sind mit (27) auf S. 149 identisch, und wenn man $\frac{1}{m}$ mit k bezeichnet, so stimmen unsere Gleichungen (34) und (36) mit (28) auf S. 149 und (31) auf S. 150 überein.

16. Nachdem wir jetzt die wichtigsten äquivalenten Projektionen aus den allgemeinen Gleichungen des Problemes abgeleitet haben, wollen wir einige derselben, die früher noch nicht eingehender behandelt worden sind, einer genauern Betrachtung unterwerfen.

§. 18.

Die Mollweide'sche Projektion.

1. Die Aufgabe, deren Lösung uns obliegt, ist folgende:
Die Gesammtoberfläche der Erdkugel soll in Form einer Ellipse dargestellt werden, deren grosse, den Aequator darstellende Achse sich zur kleinen, den ersten Meridian darstellenden, sich wie 2 : 1 verhält;

die Parallelkreise sollen durch parallele Gerade, die Meridiane durch affine Ellipsen dargestellt werden
und jede Zone auf der Kugel soll ihrer wahren Grösse gleich auf der Karte erscheinen.

2. Sind b und $2b$ die Halbachsen der Ellipse, welche der ersten Bedingung zufolge die ganze Kugeloberfläche darstellt, so ist zufolge der am Schlusse des §. 4 entwickelten Regeln die Fläche dieser Ellipse gleich $2b^2\pi$, und da die Kugelfläche gleich $4a^2\pi$ ist, so hat man für b den Werth $a\sqrt{2}$, so dass also

$$2a\sqrt{2} \text{ und } a\sqrt{2}$$

die beiden Halbachsen der Ellipse sind, welche die Karte begrenzt.

Fig. 62.

3. Wenn man die Abscisse OL des Punktes K mit x und die Ordinate $OH = LK$ mit y bezeichnet, so erhält man die Fläche $OAKH$ mittels der Formel (25) des §. 4 (S. 27), wenn man in dieser Formel $2a\sqrt{2}$ und $a\sqrt{2}$ statt a und b schreibt. Es ist also in Fig. 62

$$OAKH = 2a^2 \operatorname{Arccos} \frac{x}{2a\sqrt{2}} + \tfrac{1}{2}xy.$$

Setzt man aber weiter den Winkel $AOI = \chi$, so ist

$$\operatorname{Arccos} \frac{x}{2a\sqrt{2}} = \chi,\ x = 2a\sqrt{2}\cos\chi,\ y = a\sqrt{2}\sin\chi$$

und mithin

$$\begin{aligned} OAKH &= 2a^2\chi + 2a^2\cos\chi\sin\chi \\ &= 2a^2\chi + a^2\sin 2\chi. \end{aligned}$$

Diese Fläche muss aber die Abbildung der halben Zone zwischen dem Aequator und dem Parallelkreise von der Breite φ, also gleich $a^2\pi\sin\varphi$ sein. Die Gleichsetzung beider Werthe giebt

$$(1) \qquad \pi\sin\varphi = \sin 2\chi + 2\chi.$$

4. Es handelt sich nun darum, aus dieser Gleichung die Werthe von χ, oder von $\sin\chi$ zu berechnen, die zu den verschiedenen Werthen der Breite φ gehören. Trägt man dann auf der kleinen Halbachse der Ellipse die Werthe

$$a\sqrt{2}\sin\chi$$

vom Mittelpunkte aus ab und legt durch die so bestimmten Punkte Parallele zur grossen Achse, so erhält man die Abbildungen der Parallelkreise.

Um die Meridiane zu erhalten, hat man nur nöthig, die sämmtlichen Parallelkreise der Karte mit Einschluss des Aequators in derselben Weise einzutheilen, wie auf der Kugel diese Kreise durch die Meridiane getheilt sind. Will man also z. B. die Meridiane von 10 zu 10 Grad haben, so theilt man den ganzen Aequator und ebenso jeden Parallelkreis in 36 gleiche Theile; die so erhaltenen Theilpunkte bestimmen die verschiedenen Meridiane.

5. **Was die Berechnung von χ aus der Gleichung (1) anlangt, so kann man sich dazu des nachstehenden Näherungsverfahrens bedienen.**

Gesetzt, man habe für χ einen Näherungswerth χ' berechnet, es sei also

$$\sin 2\chi' + 2\chi' = \pi \sin \varphi',$$

wo φ' nahe bei φ liegt; $\chi' + \triangle$ sei der richtige Werth von χ, der zu φ gehört, sonach

$$\sin 2(\chi' + \triangle) + 2(\chi' + \triangle) = \pi \sin \varphi.$$

Durch Subtraktion erhält man aus beiden Gleichungen

$$\sin 2(\chi' + \triangle) - \sin 2\chi' + 2\triangle = \pi \sin \varphi - \pi \sin \varphi'$$

oder

$$2 \cos (2\chi' + \triangle) \sin \triangle + 2\triangle = \pi \sin \varphi - \pi \sin \varphi'.$$

Da aber $\triangle$ eine sehr kleine Grösse ist, so kann man näherungsweise

$$\cos (2\chi' + \triangle) = \cos 2\chi' \text{ und } \sin \triangle = \triangle$$

setzen; setzt man noch für $\sin \varphi'$ seinen Werth, so erhält man für $\triangle$ den Näherungswerth

$$(2) \qquad \triangle = \frac{\pi \sin \varphi - [\sin 2\chi' + 2\chi']}{2(1 + \cos 2\chi')};$$

der korrigirte Werth $\chi' + \triangle$ ist nun ein zweiter Näherungswerth, mit dem in gleicher Weise wie mit χ' verfahren wird, und so fort, bis die im Zähler von (2) stehende Differenz gleich Null wird.

Schon Mollweide hat eine kleine Tafel der Werthe von χ berechnet; eine genauere, die Werthe von $\sin \chi$ für verschiedene φ, von 30 zu 30 Minuten fortschreitend, enthaltende hat Jules Bourdin gegeben. Wir lassen dieselbe hier, auf sechs Decimalen reducirt, folgen.

Tabelle

der Werthe von $\sin \chi$, welche der Gleichung

$$\sin 2\chi + 2\chi = \pi \sin \varphi$$

entsprechen, von Jules Bourdin.

φ	$\sin \chi$	Diff. von $\sin \chi$	φ	$\sin \chi$	Diff. von $\sin \chi$
0° 0'	0.000 000	6854	5° 0'	0.068 506	6843
0 30	0.006 854	6854	5 30	0.075 349	6841
1 0	0.013 708	6853	6 0	0.082 190	6838
1 30	0.020 561	6853	6 30	0.089 028	6835
2 0	0.027 414	6852	7 0	0.095 863	6833
2 30	0.034 266	6851	7 30	0.102 696	6830
3 0	0.041 117	6850	8 0	0.109 526	6826
3 30	0.047 967	6848	8 30	0.116 352	6824
4 0	0.054 815	6846	9 0	0.123 176	6819
4 30	0.061 661	6845	9 30	0.129 995	6816
5 0	0.068 506		10 0	0.136 812	

φ	sin χ	Diff. von sin χ	φ	sin χ	Diff. von sin χ
10° 0′	0.136 812	6812	30° 0′	0.403 974	6483
10 30	0.143 624	6807	30 30	0.410 457	6470
11 0	0.150 431	6803	31 0	0.416 927	6857
11 30	0.157 234	6798	31 30	0.423 384	6442
12 0	0.164 032	6793	32 0	0.429 828	6430
12 30	0.170 825	6789	32 30	0.436 258	6417
13 0	0.177 614	6783	33 0	0.442 675	6403
13 30	0.174 397	6778	33 30	0.449 078	6389
14 0	0.191 175	6773	34 0	0.455 467	6375
14 30	0.197 948	6767	34 30	0.461 842	6362
15 0	0.204 715	6761	35 0	0.468 204	6346
15 30	0.211 476	6755	35 30	0.474 550	6332
16 0	0.218 231	6747	36 0	0.480 882	6317
16 30	0.224 978	6742	36 30	0.487 199	6302
17 0	0.231 720	6734	37 0	0.493 501	6286
17 30	0.238 454	6727	37 30	0.499 787	6270
18 0	0.245 181	6720	38 0	0.506 057	6254
18 30	0.251 901	6713	38 30	0.512 311	6238
19 0	0.258 614	6704	39 0	0.518 549	6221
19 30	0.265 318	6697	39 30	0.524 770	6204
20 0	0.272 015	6689	40 0	0.530 974	6188
20 30	0.278 704	6680	40 30	0.537 162	6170
21 0	0.285 384	6672	41 0	0.543 332	6153
21 30	0.292 056	6663	41 30	0.549 485	6135
22 0	0.298 719	6655	42 0	0.550 620	6117
22 30	0.305 374	6645	42 30	0.561 737	6098
23 0	0.312 019	6637	43 0	0.567 835	6081
23 30	0.318 656	6626	43 30	0.573 916	6061
24 0	0.325 282	6617	44 0	0.579 977	6043
24 30	0.331 899	6606	44 30	0.586 020	6024
25 0	0.338 505	6597	45 0	0.592 044	6004
25 30	0.345 102	6585	45 30	0.598 048	5984
26 0	0.351 687	6576	46 0	0.604 032	5963
26 30	0.358 263	6564	46 30	0.609 995	5944
27 0	0.364 827	6553	47 0	0.615 939	5923
27 30	0.371 380	6542	47 30	0.621 862	5902
28 0	0.377 922	6530	48 0	0.627 764	5881
28 30	0.384 452	6519	48 30	0.633 645	5861
29 0	0.390 971	6507	49 0	0,639 506	5838
29 30	0.397 478	6496	49 30	0.645 344	5816
30 0	0.403 974		50 0	0.651 160	

φ	sin χ	Diff. von sin χ	φ	sin χ	Diff. von sin χ
50° 0′	0.651 160	5793	70° 0′	0.861 911	4604
50 30	0.656 953	5771	70 30	0.866 515	4564
51 0	0.662 724	5748	71 0	0.871 079	4524
51 30	0.668 472	5725	71 30	0.875 603	4482
52 0	0.674 197	5702	72 0	0.880 085	4439
52 30	0.679 899	5678	72 30	0.884 524	4396
53 0	0.685 577	5655	73 0	0.888 920	4353
53 30	0.691 232	5629	73 30	0.893 273	4307
54 0	0.696 861	5605	74 0	0.897 580	4262
54 30	0.702 466	5579	74 30	0.901 842	4214
55 0	0.708 045	5553	75 0	0.906 056	4168
55 30	0.713 598	5529	75 30	0.910 224	4121
56 0	0.719 127	5502	76 0	0.914 345	4071
56 30	0.724 629	5477	76 30	0.918 416	4018
57 0	0.730 106	5450	77 0	0.922 434	3966
57 30	0.735 556	5423	77 30	0.926 400	3912
58 0	0.740 979	5395	78 0	0.930 312	3857
58 30	0.746 374	5366	78 30	0.934 169	3802
59 0	0.751 740	5339	79 0	0.937 971	3743
59 30	0.757 079	5310	79 30	0.941 714	3682
60 0	0.762 389	5281	80 0	0.945 396	3620
60 30	0.767 670	5251	80 30	0.949 016	3554
61 0	0.772 921	5222	81 0	0.952 570	3488
61 30	0.778 143	5192	81 30	0.956 058	3422
62 0	0.783 335	5160	82 0	0.959 480	3350
62 30	0.788 495	5130	82 30	0.962 830	3275
63 0	0.793 625	5098	83 0	0.966 105	3194
63 30	0.798 723	5066	83 30	0.969 299	3112
64 0	0.803 789	5034	84 0	0.972 411	3028
64 30	0.808 823	5001	84 30	0.975 439	2936
65 0	0.813 824	4969	85 0	0.978 375	2840
65 30	0.818 793	4934	85 30	0.981 215	2736
66 0	0.823 727	4899	86 0	0.983 951	2619
66 30	0.828 626	4864	86 30	0.986 570	2495
67 0	0.833 490	4829	87 0	0.989 065	2362
67 30	0.838 319	4793	87 30	0.991 427	2209
68 0	0.843 112	4756	88 0	0.993 636	2030
68 30	0.847 868	4718	88 30	0.995 666	1807
69 0	0.852 587	4680	89 0	0.997 473	1525
69 30	0.857 267	4644	89 30	0.998 998	1002
70 0	0.861 911		90 0	1.000 000	

6. Die Mollweidesche Projektion giebt ein verhältnissmässig recht anschauliches Bild der ganzen Erdoberfläche auf einem einzigen Blatte und eignet sich deshalb ganz vortrefflich zur Darstellung physikalischer und meteorologischer Verhältnisse, also zu Isothermenkarten u. dergl. Sie empfiehlt sich zu solchen und ähnlichen Verwendungen jedenfalls mehr als die gewöhnlich angewandte Merkators-Projektion, welche die polaren Regionen, in denen am wenigsten darzustellen ist, so ausserordentlich vergrössert.

Ein weiterer Vorzug ist die leichte Konstruktion der Meridiane und Parallelkreise.

Dagegen werden allerdings die Winkel ganz wesentlich geändert; man betrachte nur beispielsweise die verschiedenen Winkel, welche die Meridiane der Karte mit einem Parallelkreise einschliessen, die auf der Kugel alle unter sich gleich, nämlich rechte Winkel sind.

Auch die Längen werden bedeutend geändert; als Beispiel betrachte man die elliptischen Bogen vom Pol bis zu einem Parallelkreis der Karte, die ganz wesentlich in ihrer Länge von einander differiren, während die entsprechenden Längen auf der Kugel von gleicher Grösse sind.

7. Da die Projektion hauptsächlich zur Darstellung der ganzen Erde oder wenigstens eines beträchtlichen Theiles derselben verwendet wird, so ist es nicht nöthig, die Abplattung der Erde in Betracht zu ziehen.

§. 19.

Die Bonne'sche Projektion.

1. Das Wesen dieser Projektion ist schon früher, S. 159 und 160, besprochen und auf **Taf. IV** durch **Fig. XXII** erläutert worden. Hier handelt es sich vor allen Dingen darum, anzugeben, wie diese Projektion die Abplattung der Erde berücksichtigt. Dies geschieht aber durch eine einfache Modifikation der S. 159 gegebenen Vorschriften.

2. Der erste Meridian wird durch eine gerade Linie dargestelt; auf dieser trägt man aber nicht, wie für den Fall der Kugel, die einzelnen Grade in gleicher Grösse ab, sondern man giebt jedem Grade die Grösse

$$(1) \qquad l' = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)\,0{,}0174533}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi^3}},$$

wo φ die mittlere Breite des Grades bedeutet (vergl. S. 42).

3. Die Parallelkreise werden dargestellt durch Bogen koncentrischer Kreise, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt auf dem ersten Meridian und zwar in einer Entfernung vom mittlern Parallel liegt, welche gleich ist der Seite des Kegels, welche dem Sphäroid längs des mittleren Parallels umschrieben ist.

Die Längengrade sind auf den einzelnen Parallelkreisen in derselben Grösse wie auf dem Sphäroid abgetragen.

Bedeutet also φ die geographische Breite eines Parallelkreises, so ist

$$(2) \qquad \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

(vergl. die erste der Formeln 18 auf S. 22) der Halbmesser dieses Parallelkreises und demnach die Länge eines Längengrades gleich

$$(3) \qquad \frac{0{,}0174533 \cdot a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}};$$

endlich ist, wenn φ' die Breite des mittleren Parallels bedeutet, die Seite des längs dieses Parallels umschriebenen Kegels oder der Radius des Bogens, der auf der Karte diesen Parallel darstellt,

$$(4) \qquad r' = \frac{a \cot \varphi'}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi'}}.$$

4. Die im vorstehenden erwähnten, zur Konstruktion der Karte nöthigen Werthe, giebt uns auch die folgende Tafel, in welcher $a = 6377397^{m}16$, $e = \frac{1}{299{,}15}$ und $\varepsilon^2 = 0{,}006674372$ angenommen ist.

Breite φ	Krümmungshalbmesser des Meridianes $\varrho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}^3}$	Länge eines Meridiangrades $= \varrho \cdot 0{,}0174533$	Länge eines Parallelkreisgrades $= \frac{0{,}0174533\, a \cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$	Seite des Berührungskegels $r = \frac{a \cot\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$
0°	6 334 831 m.	110 563,7m.	111 306,6 m.	∞
1	6 334 853	110 564,0	111 289,7	365 361 200m.
2	6 334 910	110 565,0	111 239,2	182 625 500
3	6 335 011	110 566,7	111 155,0	121 689 100
4	6 335 141	110 569,0	111 037,2	91 202 500
5	6 335 317	110 572,0	110 885,8	72 895 830
6	6 335 527	110 575,8	110 700,9	60 679 100
7	6 335 777	110 580,1	110 482,4	51 942 300
8	6 336 061	110 585,1	110 230,5	45 380 470
9	6 336 390	110 590,8	109 945,2	40 268 593
10	6 336 746	110 597,0	109 626,6	36 171 660
11	6 337 146	110 604,0	109 274,9	32 812 840
12	6 337 580	110 611,6	108 890,0	30 007 630
13	6 338 044	110 619,7	108 472,1	27 628 210
14	6 338 551	110 628,5	108 021,4	25 583 340
15	6 339 100	110 637,9	107 538,0	23 806 110
16	6 339 664	110 647,8	107 022,0	22 246 280
17	6 340 260	110 658,4	106 473,4	20 865 480
18	6 340 894	110 669,4	105 892,6	19 633 860
19	6 341 566	110 681,1	105 279,9	18 527 860
20	6 342 267	110 693,3	104 634,9	17 528 610

Breite φ	Krümmungshalbmesser des Meridianes $\varrho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}^3}$	Länge eines Meridiangrades $= \varrho \cdot 0{,}0174533$	Länge eines Parallelkreisgrades $= \frac{0{,}0174533\, a \cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$	Seite des Berührungskegels $r = \frac{a \cot\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$
21°	6 343 001 m.	110 706,0m.	103 958,3 m.	16 620 820m.
22	6 343 756	110 719,2	103 250,1	15 792 018
23	6 344 540	110 732,9	102 510,6	15 031 880
24	6 345 350	110 747,1	101 739,9	14 331 790
25	6 346 184	110 761,7	100 938,3	13 684 540
26	6 347 039	110 776,7	100 105,9	13 084 000
27	6 347 924	110 792,2	99 243,2	12 524 960
28	6 348 837	110 808,1	98 350,2	12 002 970
29	6 349 767	110 824,4	97 427,4	11 514 160
30	6 350 719	110 841,0	96 474,8	11 055 200
31	6 351 693	110 858,0	95 492,0	10 623 080
32	6 352 680	110 875,2	94 481,9	10 215 545
33	6 353 680	110 892,8	93 442,0	9 830 057
34	6 354 700	110 910,7	92 373,7	9 464 752
35	6 355 730	110 928,8	91 277,1	9 117 868
36	6 356 771	110 947,2	90 152,7	8 787 854
37	6 357 824	110 965,8	89 000,8	8 473 358
38	6 358 887	110 984,6	87 821,6	8 173 016
39	6 360 051	111 003,5	86 616,1	7 885 865
40	6 361 133	111 021,6	85 383,7	7 610 790
41	6 362 227	111 041,8	84 125,1	7 346 915
42	6 363 334	111 061,1	82 840,8	7 093 423
43	6 364 446	111 080,5	81 531,1	6 849 560
44	6 365 560	111 100,0	80 196,5	6 614 648
45	6 366 676	111 119,4	78 837,3	6 388 064
46	6 367 793	111 138,9	77 453,9	6 169 244
47	6 368 907	111 158,4	76 046,8	5 957 663
48	6 370 020	111 177,8	74 616,3	5 752 845
49	6 371 129	111 197,2	73 162,9	5 554 355
50	6 372 233	111 216,4	71 687,0	5 361 781
51	6 373 324	111 235,6	70 189,1	5 174 752
52	6 374 417	111 254,6	68 669,6	4 992 923
53	6 375 353	111 273,4	67 129,0	4 815 973
54	6 376 570	111 292,1	65 567,7	4 643 632
55	6 377 631	111 310,7	63 986,3	4 475 535
56	6 378 680	111 322,9	62 385,1	4 311 510
57	6 379 711	111 347,0	60 764,7	4 151 283
58	6 380 726	111 364,7	59 125,6	3 994 639
59	6 381 717	111 382,0	57 468,2	3 841 356
60	6 382 697	111 399,1	55 793,1	3 691 242

Breite φ	Krümmungshalbmesser des Meridianes $\varrho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}^3}$	Länge eines Meridiangrades $= \varrho \cdot 0{,}0174533$	Länge eines Parallelkreisgrades $= \frac{0{,}0174533\, a \cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$	Seite des Berührungskegels $r = \frac{a \cot\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$
61°	6 383 657 m.	111 415,8 m.	54 100,8 m.	3 544 107 m.
62	6 384 597	111 432,3	52 391,8	3 399 778
63	6 385 519	111 448,3	50 666,5	3 258 090
64	6 386 410	111 463,9	48 925,6	3 118 884
65	6 387 284	111 479,1	47 169,7	2 982 013
66	6 388 131	111 493,9	45 399,1	2 847 341
67	6 388 951	111 508,2	43 614,4	2 714 731
68	6 389 746	111 522,1	41 816,3	2 584 060
69	6 390 510	111 535,4	40 004,3	2 455 204
70	6 391 247	111 548,3	38 181,8	2 328 052
71	6 391 957	111 561,3	36 346,5	2 202 495
72	6 392 634	111 572,4	34 499,9	2 078 425
73	6 393 277	111 583,8	32 642,7	1 955 744
74	6 393 889	111 594,4	30 775,2	1 834 353
75	6 394 466	111 604,5	28 898,4	1 710 221
76	6 395 010	111 614,0	27 012,5	1 595 083
77	6 395 521	111 622,9	25 118,2	1 477 025
78	6 396 000	111 631,3	23 216,2	1 359 906
79	6 396 441	111 638,9	21 306,9	1 243 646
80	6 396 847	111 646,0	19 391,1	1 128 165
81	6 397 214	111 652,6	17 469,2	1 013 385
82	6 397 541	111 658,1	15 541,8	899 232
83	6 397 833	111 663,3	13 609,7	785 633
84	6 398 086	111 667,6	11 673,3	672 515
85	6 398 297	111 671,4	9 733,3	559 807
86	6 398 469	111 674,4	7 790,3	447 439
87	6 398 606	111 676,7	5 511,8	335 343
88	6 398 704	111 678,4	3 897,5	223 449
89	6 398 761	111 679,4	1 949,1	111 691
90	6 398 789	111 679,9	0	0

5. Bei Konstruktion grösserer Karten wird in der Regel das Centrum O über die Zeichenebene hinausfallen; es wird also dann nicht möglich sein, die Parallelkreise wirklich mit dem Zirkel zu schlagen, vielmehr wird man ihre einzelnen Punkte durch ihre Koordinaten bestimmen und dann verbinden müssen.

Betrachten wir zu dem Zwecke die Gerade, welche den Mittel-Parallel in dem Schnittpunkte des letzteren und des ersten Meridianes berührt, als Achse der x und den Mittelmeridian als Achse der y, so findet man leicht

$$(5)\quad \begin{cases} x = r \sin\Theta \\ \text{und } y = r' - r\cos\Theta = r' - r + x \tan\frac{\Theta}{2}, \end{cases}$$

wobei r' und r die frühere Bedeutung haben, Θ aber der Winkel zwischen dem ersten Meridiane und dem Halbmesser des betreffenden Kartenpunktes ist. Zur Bestimmung dieses Winkels Θ dient die Gleichung

$$\Theta = \frac{a\lambda \cos\varphi}{r\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}. \tag{6}$$

6. Diese Projektion hat, wie die Kegelprojektionen, auf jedem Parallel gleiche Längengrade, aber sie entbehrt eines Vorzugs, den jene Projektionen besitzen, die Meridiane stehen nämlich nicht rechtwinklig auf den Parallelkreisen, dieses ist vielmehr nur beim Mittelparallel und Mittelmeridian der Fall. Es entsteht daher die Frage, wie gross für eine gewisse Breite φ und Länge λ dieser Winkel ist.

Fig. 63.

Ist $OP' = r$, Winkel $P'OM = \Theta$, $OP'_1 = r + dr$, Winkel $P'_1OM = \Theta + \frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} d\varphi$, endlich Q' der Punkt, in welchem OP' den mit OP'_1 geschlagenen Kreis schneidet, so ist der Winkel $OP'P'_1 = \psi$, welchen das Bogenelement $P'P'_1$ mit OP' einschliesst durch die Gleichung gegeben

$$\tan\psi = \frac{Q'P'_1}{Q'P'} = \frac{r\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} d\varphi}{dr}. \tag{7}$$

Nun ist

$$r\Theta = \frac{a\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}},$$

und wenn man diese Gleichung nach φ differentiirt, so entsteht

$$r\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} d\varphi + \Theta dr = -\frac{a(1-\varepsilon^2)\lambda\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}^3}. \tag{8}$$

Es ist aber r gleich r' vermindert um den Meridianbogen s, der auf dem Ellipsoid zwischen dem mittleren Parallel und demjenigen von der Breite φ liegt; daher ist

$$dr = -ds = -\frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}^3}$$

zufolge Formel (21) auf S. 24. Vorstehende Gleichung (8) nimmt daher die Form an

$$r\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} d\varphi + \Theta dr = \lambda\sin\varphi \cdot dr,$$

und mithin ist

$$\frac{r\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi} d\varphi}{dr} + \Theta = \lambda\sin\varphi,$$

also

(9) $$\tan \psi = \lambda' \sin \varphi - \Theta,$$

wo λ und Θ in Bogenmaass ausgedrückt sind. Hat man λ und Θ in Graden, so muss man

(10) $$\tan \psi = 0{,}0174533\,(\lambda \sin \varphi - \Theta)$$

schreiben.

In der Breite φ', auf dem mittleren Parallel, ist $\psi = 0$, wie aus den geometrischen Principien der Projektion erhellt und auch durch eine einfache Rechnung aus der Formel folgt. Auf beiden Seiten dieses Paralles fällt die Abweichung ψ nach entgegengesetzten Seiten, sie erscheint in Formel (9) positiv nach dem Pole, negativ nach dem Aequator hin.

7. Wir wollen uns jetzt die allgemeinere Aufgabe stellen, den Winkel μ' zu ermitteln, welcher auf der Karte zwischen einem Bogenelemente $P'R'$ und dem Meridiane gebildet wird, wenn μ der entsprechende Winkel auf der Kugel ist.

In **Fig. 63** ist zunächst

$$\tan Q'P'R' = \tan(\mu' - \psi) = \frac{P'_1R' - P'_1Q'}{P'Q'} = \frac{P'_1R'}{P'Q'} - \tan \psi.$$

Nun ist aber auf dem Ellipsoid die Tangente von μ gleich dem Bogenelemente P_1R des Parallelkreises von der Breite $\varphi + d\varphi$, dividirt durch das Meridianelement ds. Nach den Principien der Bonne'schen Projektion ist aber $P_1R = P'R'$ und ds ist, wie wir oben sahen, so gross als $P'Q'$, folglich ist

$$\frac{P'R'}{P'Q'} = \tan \mu$$

und also

(11) $$\tan(\mu' - \psi) = \tan \mu - \tan \psi = \frac{\sin(\mu - \psi)}{\cos \mu \cos \psi}.$$

So lange ψ sehr klein bleibt, was der Fall ist, wenn man sich nicht weiter als etwa 7 bis 8 Grad vom Mittelpunkte der Karte entfernt, kann man demnach $\mu' = \mu$ annehmen, so dass hier die Winkel nahezu ungeändert bleiben.

Da nun die Parallelkreisbogen ohnedies durchweg ungeändert bleiben, so ergiebt sich, dass um die Mitte der Karte herum auch alle Entfernungen ungeändert bleiben, dass also hier die Karte nahezu mit dem Originale übereinstimmt.

Diese Umstände sprechen für die Verwendung der Bonne'schen Projektion in Fällen, wo man sich nicht allzuweit von dem Centrum entfernt. Die Bonne'sche Projektion ist denn auch öfters im Gebrauch, namentlich ist sie vom französischen *Dépôt de là Guerre* adoptirt worden.

8. Die in diesem Paragraphen gegebenen Regeln und Formeln gelten auch für die auf S. 160 u. f. behandelte Sanson-Flamsteed'sche Projektion, welche, wie dort erwähnt, nur einen speciellen Fall der Bonne'schen repräsentirt.

Fünftes Kapitel.

Die konformen Abbildungen.

§. 20.

Allgemeine Theorie.

1. Dem in der Einleitung (S. 4) Gesagten zufolge haben wir jetzt die Aufgabe zu lösen, zu jedem Punkte P des Sphäroides den entsprechenden Punkt P' der Karte derart zu bestimmen, dass ein Dreieck PP_1Q des Sphäroides und das entsprechende $P'P'_1Q'$ der Karte um so mehr einander ähnlich sind, je näher ihre Seiten der Grenze Null kommen.

2. Es sei nun in **Fig. 64** PQ ein Meridianelement auf dem Sphäroid, QP_1 ein durch Q gehendes Parallelkreiselement, $P'Q'$ und $Q'P'_1$ seien die entsprechenden Elemente der Karte; dann muss der Winkel zwischen den letztgenannten Elementen ebensowohl wie der zwischen den beiden erstgenannten ein rechter sein und ausserdem muss die Gleichung bestehen

Fig. 64.

$$\frac{Q'P'_1}{P'Q'} = \frac{QP_1}{PQ}.$$

Quadrirt man diese Gleichung und addirt beiderseits die Einheit, so kann man derselben nach vollzogener Multiplikation mit $P'Q'^2$ die Form geben

$$(1) \qquad P'Q'^2 + Q'P'^2_1 = \frac{P'Q'^2}{PQ^2}(PQ^2 + QP_1^2).$$

Hier ist nun

$$PQ^2 + QP_1^2 = PP_1^2 \text{ und } P'Q'^2 + Q'P'^2_1 = P'P'^2_1,$$

und was den Faktor $\frac{P'Q'^2}{PQ^2}$ anlangt, so kommt in demselben das Parallelkreiselement nicht vor, er ist also von der Richtung des Linienelementes PP_1 unabhängig und hängt nur ab von den Koordinaten φ und λ des Punktes P; wir wollen ihn $\varkappa^2$ nennen. Dadurch nimmt unsere Gleichung (1) die Form an

$$P'P_1'^2 = \varkappa^2 \cdot PP_1^2, \tag{2}$$

d. h. das Verhältniss zwischen einem vom Punkte P des Sphäroides ausgehenden Linienelemente und dem entsprechenden der Karte ist nur von den Koordinaten des Punktes P, nicht von der Richtung des Elementes abhängig.

Statt der Erklärung in Nr. 1 werden wir in Zukunft die Gleichung (2) benutzen.

3. Bezeichnet man mit x und y die auf ein rechtwinkliges Achsensystem bezogenen Koordinaten von P', mit $x + dx$ und $y + dy$ die des Punktes P', so ist

$$P'P_1'^2 = dx^2 + dy^2,$$

welche Lage auch übrigens die Achsen haben mögen.

Bezeichnen wir ferner (vergl. Formel 21 auf S. 24) mit

$$ds = \frac{a(1 - \varepsilon^2)\,d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}^3}$$

das Meridianelement PQ und mit

$$r = \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$$

den Radius des Parallelkreises, so kann man für QP_1 schreiben $rd\lambda$ und es ist daher

$$PP_1^2 = ds^2 + r^2 d\lambda^2.$$

An die Stelle der Gleichung (2) tritt also

$$dx^2 + dy^2 = \varkappa^2 (ds^2 + r^2 d\lambda^2),$$

oder

$$dx^2 + dy^2 = \varkappa^2 r^2 \left[\left(\frac{ds}{r}\right)^2 + d\lambda^2\right]. \tag{3}$$

Hier ist $\varkappa r$ ebenfalls eine nur von den Variabeln φ und λ abhängige Funktion, die wir mit n bezeichnen. Ferner ist $\frac{ds}{r}$ eine integrale Grösse, nämlich

$$\frac{ds}{r} = \frac{(1 - \varepsilon^2)\,d\varphi}{\cos\varphi\,(1 - \varepsilon^2 \sin\varphi)};$$

setzen wir diese Grösse gleich du, so ist

$$u = \int \frac{(1 - \varepsilon^2)\,d\varphi}{\cos\varphi\,(1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)} = \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} - \varepsilon^2 \int \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)}$$

$$= l \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\, l\, \frac{1 - \varepsilon \sin\varphi}{1 - \varepsilon \cos\varphi} + C,$$

wo das Symbol l den natürlichen Logarithmus, C aber die Inte-

grationskonstante bedeutet. Denkt man sich letztere in der Form lK geschrieben, so kann man für u den Werth setzen

$$(4) \qquad u = l\left[K \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin \varphi}{1 + \varepsilon \sin \varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right].$$

Mit Berücksichtigung des eben Gesagten geht nun die Gleichung (3) über in

$$(5) \qquad dx^2 + dy^2 = n^2 (du^2 + d\lambda^2)$$

4. Um die Gleichung (5) zu lösen, setzen wir, mit i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bezeichnend,

$$(6) \qquad \begin{cases} u + i\lambda = \alpha, & u - i\lambda = \beta \\ x + iy = \alpha', & x - iy = \beta'; \end{cases}$$

durch Differentiation dieser Gleichung erhalten wir

$$(7) \qquad \begin{cases} du + id\lambda = d\alpha, & du - id\lambda = d\beta \\ dx + idy = d\alpha', & dx - idy = d\beta'. \end{cases}$$

Multiplicirt man je zwei nebeneinanderstehende dieser Differentialgleichungen, und setzt die Resultate in Gleichung (5) ein, so ergiebt sich

$$(8) \qquad d\alpha'\, d\beta' = n^2\, d\alpha\, d\beta.$$

Da x und y Funktionen von φ und λ, also auch von u und λ sind, so kann man im Allgemeinen auch α' und β' als Funktionen von α und β betrachten. Man hat daher, wenn man mit dem Symbol ∂ die partielle Differentiation andeutet

$$d\alpha' = \frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\partial \alpha'}{\partial \beta} \cdot d\beta \text{ und } d\beta' = \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\partial \beta'}{\partial \beta} \cdot d\beta,$$

so dass man statt (8) auch schreiben kann

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} \cdot \dfrac{\partial \beta'}{\partial \alpha} \cdot d\alpha^2 + \dfrac{\partial \alpha'}{\partial \beta} \cdot \dfrac{\partial \beta'}{\partial \beta} \cdot d\beta^2 \\ + \left(\dfrac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} \cdot \dfrac{\partial \beta'}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \alpha'}{\partial \beta} \cdot \dfrac{\partial \beta'}{\partial \alpha}\right) d\alpha\, d\beta = n^2\, d\alpha\, d\beta. \end{cases}$$

Diese Gleichung kann aber nur bestehen, wenn auf ihrer linken Seite die mit $d\alpha^2$ und $d\beta^2$ multiplicirten Glieder verschwinden; es muss daher sein

$$\text{entweder } \frac{\partial \alpha'}{\partial \beta} = 0 \text{ und } \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha} = 0$$

$$\text{oder } \frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} = 0 \text{ und } \frac{\partial \beta'}{\partial \beta} = 0.$$

Im ersten Falle ist α' von β, β' von α unabhängig und man kann setzen

$$\alpha' = F(\alpha) \text{ und } \beta' = F_1(\beta),$$

im zweiten Falle dagegen ist umgekehrt α' von α und β' von β unabhängig, also

$$\alpha' = \Phi(\beta) \text{ und } \beta' = \Phi_1(\alpha),$$

wo F, F_1, Φ und Φ_1 allgemeine Funktionszeichen sind.

Da α' und β' sich nur durch das Vorzeichen von y unterscheiden und es jedenfalls willkürlich ist, welche Richtung der y-Achse man als die positive annimmt, so ist zwischen beiden Fällen kein anderer Unterschied, als dass das eine Mal die Aehnlichkeit direkt, das andere Mal aber indirekt ist. Wir wollen daher den ersten Fall unseren weiteren Betrachtungen zu Grunde legen und später bei den speciellen Anwendungen der allgemeinen Formeln die Koordinaten x und y so legen, dass die Aehnlichkeit direkt wird.

5. Indem wir für α und α', β und β' ihre Werthe setzen, haben wir also

$$x + iy = F(u + i\lambda) \text{ und } x - iy = F_1(u - i\lambda).$$

woraus folgt

$$(10) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}[F(u + i\lambda) + F_1(u - i\lambda)], \\ y = \frac{1}{2i}[F(u + i\lambda) - F_1(u - i\lambda)]. \end{cases}$$

6. Für $\lambda = 0$ ergeben sich aus vorstehenden Formeln die Gleichungen derjenigen Kurve der Karte, welche den ersten Meridian darstellt:

$$x = \frac{1}{2}[F(u) + F_1(u)],$$
$$y = \frac{1}{2i}[F(u) - F_1(u)].$$

Setzen wir dafür kurzweg

$$x = f(u), \quad y = f_1(u),$$

so ist umgekehrt

$$F(u) = f(u) + if_1(u), \quad F_1(u) = f(u) - if_1(u).$$

Man kann sonach statt der Gleichungen (10) auch die folgenden schreiben

$$(11) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}[f(u + i\lambda) + f(u - i\lambda)] \\ \qquad + \frac{i}{2}[f_1(u + i\lambda) - f_1(u - i\lambda)] \\ y = \frac{1}{2}[f_1(u + i\lambda) + f_1(u - i\lambda)] \\ \qquad - \frac{i}{2}[f(u + i\lambda) - f(u - i\lambda)], \end{cases}$$

wo nun f und f_1 wieder ganz willkürliche Funktionen sind.

7. Wir wenden uns nunmehr zur Bestimmung des linearen Vergrösserungsverhältnisses

$$\varkappa = \frac{n}{r}.$$

Durch die Annahme

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha} = 0$$

geht die Gleichung (9) in

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \beta'}{\partial \beta} \cdot d\alpha\, d\beta = n^2\, d\alpha\, d\beta$$

über, und es ist demnach

$$n^2 = \frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \beta'}{\partial \beta} = F'(\alpha) \cdot F_1'(\beta),$$

wo F' und F_1' die Differentialquotienten der Funktionen F und F_1 bedeuten. Dies giebt für $\varkappa$ die Formel

$$(12) \qquad \varkappa = \frac{[F'(u + i\lambda)\ F_1'(u - i\lambda)]^{\frac{1}{2}}}{r},$$

oder, wenn man die Funktionen f und f_1 einführt,

$$(13) \quad \varkappa = \frac{([f'(u+i\lambda) + if_1'(u+i\lambda)] \cdot [f'(u-i\lambda) - if_1'(u-i\lambda)])^{\frac{1}{2}}}{r}.$$

8. Ehe wir zur Betrachtung specieller Fälle übergehen, wollen wir noch einige Bemerkungen über einen in der Formel für u, Gleich. (4), vorkommenden Ausdruck, nämlich

$$(14) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin \varphi}{1 + \varepsilon \sin \varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

hinzufügen. Für den Fall der Kugel, $\varepsilon = 0$, geht derselbe in

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \cot \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot \tfrac{1}{2}\chi$$

über, wenn man mit χ, wie früher, das Komplement der Breite bezeichnet.

Wir setzen daher allgemein den Ausdruck (14) gleich

$$\cot \tfrac{1}{2}\zeta$$

oder schreiben

$$(15) \qquad \tan \tfrac{1}{2}\zeta = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

Da

$$\left(\frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} > 1$$

ist, so ist auch

$$\tfrac{1}{2}\zeta > \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

oder

$$\zeta > \frac{\pi}{2} - \varphi$$

und wir wollen uns deshalb die Aufgabe stellen, die Differenz

$$(16) \qquad \zeta - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \zeta - \chi$$

aus der Gleich. (15) zu berechnen.

Jedenfalls ist ζ eine Funktion von ε; man kann daher setzen

$$\zeta = F(\varepsilon) = F(0) + \frac{\varepsilon}{1} F'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} F''(0) + \ldots,$$

wo

$$(17) \qquad F(\varepsilon) = 2 \operatorname{Arctan}\left[\tan\frac{\chi}{2} \cdot \left(\frac{1 + \varepsilon\cos\chi}{1 - \varepsilon\cos\chi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]$$

ist. Differentiirt man diesen Ausdruck zweimal nach ε und setzt in den beiden erhaltenen Formeln für $F'(\varepsilon)$ und $F''(\varepsilon)$ dann $\varepsilon = 0$, so ergiebt sich

$$F'(0) = 0 \quad \text{und} \quad F''(0) = \sin 2\chi,$$

und da ausserdem

$$F(0) = \chi$$

ist, so hat man

$$\zeta = \chi + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2\chi = \chi + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2\varphi,$$

und also

$$(18) \qquad \zeta - \chi = \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2\varphi,$$

wenn höhere Potenzen von ε vernachlässigt werden.

9. Die Differenz $\zeta - \chi$ lässt sich übrigens leicht deuten. Ist φ die geographische Breite eines Punktes P auf irgend einem Meridiane des Ellipsoides, so gelten für die rechtwinkligen Koordinaten x und y dieses Punktes die Gleichungen (18) auf S. 22. Bezeichnet man nun mit μ die geocentrische Breite des Punktes P, d. h. den Winkel zwischen dem als x-Achse dienenden Halbmesser des Aequators und dem nach P hingehenden Ellipsen-Halbmesser, so ist

$$\tan\mu = \frac{y}{x} = (1 - \varepsilon^2)\tan\varphi.$$

Setzt man nun hier

$$\mu = f(\varepsilon) = f(0) + \frac{\varepsilon}{1} f'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(0),$$

so ergiebt sich bei Ausführung der Rechnung

$$\mu = \varphi - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2\varphi,$$

oder

$$\varphi - \mu = \frac{\varepsilon^2}{2}\sin 2\varphi.$$

Der Unterschied zwischen der geographischen und geocentrischen Breite, $\varphi - \mu$, ist also eben so gross, als der Unterschied $\zeta - \chi$; es ist somit ζ das Komplement der geocentrischen Breite.

Germain hat diese Grösse mit dem Namen korrigirte Poldistanz belegt und dafür die folgende Tafel gegeben, wobei die Abplattung $= \frac{1}{299,15}$ angenommen ist.

Tabelle von $\zeta - \chi = \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2\varphi$.

$\chi = 90^0 - \varphi$	$\zeta - \chi$	Diff.	$\chi = 90^0 - \varphi$	$\zeta - \chi$	Diff.
1° oder 89°	0° 0′ 24,0″	24,0″	23° oder 67°	0° 8′ 15,1″	16,4″
2 „ 88	0 48,0	23,9	24 „ 66	8 31,5	15,8
3 „ 87	1 11,9	23,9	25 „ 65	8 47,3	15,1
4 „ 86	1 35,8	23,7	26 „ 64	9 2,4	14,4
5 „ 85	1 59,5	23,6	27 „ 63	9 16,8	13,7
6 „ 84	2 23,1	23,4	28 „ 62	9 30,5	13,2
7 „ 83	2 46,5	23,2	29 „ 61	9 43,7	12,4
8 „ 82	3 9,7	23,0	30 „ 60	9 56,1	11,6
9 „ 81	3 32,7	22,7	31 „ 59	10 7,7	11,0
10 „ 80	3 55,4	22,4	32 „ 58	10 18,7	10,1
11 „ 79	4 17,8	22,1	33 „ 57	10 28,8	9,4
12 „ 78	4 39,9	21,8	34 „ 56	10 38,2	8,6
13 „ 77	5 1,7	21,4	35 „ 55	10 46,8	7,9
14 „ 76	5 23,1	21,0	36 „ 54	10 54,7	7,0
15 „ 75	5 44,1	20,6	37 „ 53	11 1,7	6,2
16 „ 74	6 4,7	20,2	38 „ 52	11 7,9	5,4
17 „ 73	6 24,9	19,7	39 „ 51	11 13,3	4,5
18 „ 72	6 44,6	19,2	40 „ 50	11 17,8	3,8
19 „ 71	7 3,8	18,7	41 „ 49	11 21,6	3,0
20 „ 70	7 22,5	18,1	42 „ 48	11 24,6	2,1
21 „ 69	7 40,6	17,6	43 „ 47	11 26,7	1,2
22 „ 68	7 58,2	17,0	44 „ 46	11 26,7	0,4
23 „ 67	8 15,1		45 „ 45	11 28,3	

9. Abgesehen von den im Bezug auf die stereographische Projektion gemachten Bemerkungen hat zuerst Joh. Heinrich Lambert (geb. 1728 in Mühlhausen, gest. 1777 in Berlin) in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik“ etc. 1772 auf die Eigenthümlichkeit einiger Land- und Himmelskarten, dass deren kleinste Theile dem Originale ähnlich sind, aufmerksam gemacht und dem Ausdrucke des Längenelementes auf der Kugel und auf dem Rotationsellipsoide die zur allgemeinen Lösung des Problemes dienliche Form gegeben.

Später hat der französische Mathematiker Jos. Louis Lagrange (geb. 1736 in Turin, gest. 1813 in Paris) diese Lösung auf sämmtliche Rotationsflächen ausgedehnt in einer in den *Nou-*

veaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, Année 1779, p. 161 veröffentlichten Arbeit.

Die ganz allgemeine Lösung des Problemes rührt aber von dem deutschen Mathematiker Karl Friedrich Gauss (geb. 1777 in Braunschweig, gest. 1855 in Göttingen) her. Vergleiche die Angaben am Schlusse des §. 22.

Seitdem ist das Problem der konformen Abbildung eine Lieblingsaufgabe der Mathematiker geworden und vielfach behandelt worden; doch ist dabei mehr noch dem mathematischen als dem rein kartographischen Bedürfnisse Rechnung getragen worden.

§. 21.

Die Mercator-Projektion.

1. Es ist bereits in §. 13 eine elementare Theorie dieser von dem berühmten Geographen Gerhard Mercator (eigentlich Cremer, geb. 1512 in Rupelmonde, gest. 1594 in Duisburg) herrührenden Projektion gegeben worden, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass es sich um die Darstellung der Kugelfläche handelt. Wir verweisen hier wieder auf diese Auseinandersetzung.

An dieser Stelle ist es nun zunächst unsere Aufgabe, aus den allgemeinen Gleichungen, die für jede konforme Abbildung in Geltung sind, durch Specialisirung die Formeln abzuleiten, welche zur Charakterisirung der Mercator-Projektion dienen.

Zu dem Zwecke setzen wir

$$f(u) \pm i\lambda) = 0 \text{ und } f_1(u \pm i\lambda) = b\,(u \pm i\lambda),$$

wodurch die Gleichungen (11) des vorigen Paragraphen übergehen in

$$x = -\,b\lambda \text{ und } y = bu = bl\left[K \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin\varphi}{1 + \varepsilon \sin\varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right].$$

Wählen wir aber die Koordinatenrichtung so, dass mit einem positiven Werthe von λ auch ein positiver Werth von x verbunden ist und setzen wir ferner die Integrationskonstante $K = +1$, so ergeben sich die zwei Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} x = b\lambda \\ \text{und } y = bl\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon \sin\varphi}{1 + \varepsilon \sin\varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right], \end{cases}$$

welche die Projektion charakterisiren.

Setzt man $\varepsilon = 0$, so entstehen die Gleichungen

$$x = b\lambda \text{ und } y = bl \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

welche mit den auf S. 120 gegebenen identisch sind.

2. Was die Vergrösserung $\varkappa$ betrifft, so ist unserer Annahme zufolge in Gleich. (13) des vorigen Paragraphen $f' = 0$, $f_1' = b$, folglich

$$(2)\qquad \varkappa = \frac{b}{r} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi} \cdot \sec\varphi.$$

Wenn man die willkürliche Grösse $b = a$ setzt und dann $\varepsilon = 0$ annimmt, so ergiebt sich für $\varkappa$ der Werth $\sec\varphi$, übereinstimmend mit S. 121.

3. Wir wenden uns nunmehr zur allgemeinen Werthermittelung von x und y auf Grund der Formeln (1), wobei wir aber die Grösse b, welche lediglich die Wahl des Maassstabes der Karte bedingt, als Einheit annehmen.

Ueber die erste Gleichung $x = \lambda$ ist dann Nichts weiter zu sagen; die Längen werden eben ganz gleichmässig auf der geraden Linie abgetragen, welche den Aequator darstellt.

Die zweite Gleichung lautet dann

$$y = l\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - \varepsilon\sin\varphi}{1 + \varepsilon\sin\varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right]$$

oder

$$y = l\tan\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\, l\left(\frac{1 - \varepsilon\sin\varphi}{1 + \varepsilon\sin\varphi}\right).$$

Nun gelten für natürliche Logarithmen die Formeln

$$l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + - \ldots$$

und

$$l(1 - z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \ldots,$$

folglich

$$l\,\frac{1 - z}{1 + z} = -2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\right)$$

und also

$$\frac{\varepsilon}{2}\, l\left(\frac{1 - \varepsilon\sin\varphi}{1 + \varepsilon\sin\varphi}\right) = -\left(\varepsilon^2\sin\varphi + \frac{1}{3}\varepsilon^4\sin^3\varphi\right).$$

Sonach hat man für y die Formel

$$y = l\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \left(\varepsilon^2\sin\varphi + \frac{1}{3}\varepsilon^4\sin^3\varphi\right).$$

Nimmt man zur praktischen Berechnung gemeine Logarithmen, so ist

$$l\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = 2{,}302\,5851 \cdot lg\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

mithin

$$(3)\quad y = 2{,}302\,5851 \cdot lg\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \left(\varepsilon^2\sin\varphi + \frac{1}{3}\varepsilon^4\sin^3\varphi\right),$$

wenn höhere Potenzen von ε als die vierte vernachlässigt werden.

Wenn man nach dieser Formel und der zugehörigen

$$x = \lambda$$

konstruirt, so wird der halbe Aequator (180°) durch eine Gerade von der Länge $\pi = 3{,}1415927$ repräsentirt. Nimmt man aber als

Längeneinheit die Grösse einer Aequatorminute an, d. h. den $180 \cdot 60$sten Theil von π, so muss man die Formel (3) mit

$$\frac{180 \cdot 60}{\pi} = 3437{,}7\ldots$$

multipliciren. Dies giebt

$$(4) \qquad y = 7915{,}704674\, lg \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - 3437{,}7\left(\varepsilon^2 \sin\varphi + \frac{1}{3}\,\varepsilon^4 \sin{}^3\varphi\right).$$

Karl Ludwig Christian Rümker hat in seinem „Handbuche der Schifffahrtskunde“ die nachstehende Tabelle der Werthe von y veröffentlicht, bei deren Berechnung er allerdings für die Abplattung den Werth $\frac{1}{303}$ zu Grunde geleg hat. Indessen kann man ohne merklichen Fehler diese Tabelle auch unter der Annahme des Werthes $\frac{1}{299{,}15}$ für die Abplattung anwenden, da der Unterschied im Werthe von y, der sich ergiebt, wenn man den einen Werth der Abplattung mit dem andern vertauscht, nur sehr gering ist. Es ist nämlich

	$\frac{1}{303}$	$\frac{1}{299{,}15}$
$\varphi = 10^0$	$y =$ 599,1	$y =$ 599,1
20	1217,4	1217,3
30	1877,0	1876,9
40	2608,1	2608,0
50	3457,0	3456,8
60	4507,7	4507,4
70	5944,5	5044,3
80	8352,8	8352,6.

Hiernach ist es leicht, die kleine Korrektur anzugeben, welche man von den Zahlen der Rümker'schen Tabelle abzuziehen hat, um diejenigen Zahlen zu erhalten, welche dem Bessel'schen Werthe der Abplattung entsprechen.

Tabelle der Werthe von

$$y = 7915{,}704674' \, lg \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - 3437{,}7' \left(\varepsilon^2 \sin\varphi + \frac{\varepsilon^4}{3} \sin^3\varphi\right)$$

von C. Rümker.

φ	y	φ	y	φ	y
0° 0'	0,0'	16° 0'	966,5'	29° 0'	1808,4'
30	29,8	30	997,5	10	1819,8
1 0	59,6	17 0	1028,6	20	1831,2
30	89,4	30	1059,9	30	1842,6
2 0	119,2	18 0	1091,2	40	1854,1
30	149,1	30	1122,6	50	1865,5
3 0	178,9	19 0	1154,1	30 0	1877,0
30	208,7	30	1185,7	10	1888,5
4 0	238,6	20 0	1217,4	20	1900,0
30	268,5	30	1249,1	30	1911,6
5 0	298,4	21 0	1281,0	40	1923,1
30	328,3	30	1313,0	50	1934,7
6 0	358,3	22 0	1345,2	31 0	1946,3
30	388,3	30	1377,4	10	1957,9
7 0	418,3	23 0	1409,7	20	1969,6
30	448,3	30	1442,2	30	1981,2
8 0	478,4	24 0	1474,8	40	1992,9
30	508,5	30	1507,5	50	2004,6
9 0	538,7	25 0	1540,4	32 0	2016,3
30	568,9	30	1573,4	10	2028,1
10 0	599,1	26 0	1606,5	20	2039,8
30	629,4	30	1639,8	30	2051,6
11 0	659,7	27 0	1673,2	40	2063,4
30	690,1	30	1706,8	50	2075,3
12 0	720,6	28 0	1740,5	33 0	2087,1
30	751,1	10	1751,7	10	2099,0
13 0	781,7	20	1763,0	20	2110,9
30	812,3	30	1774,4	30	2122,8
14 0	843,0	40	1785,7	40	2134,8
30	873,7	50	1797,0	50	2146,8
15 0	904,6	29 0	1808,4	34 0	2158,8
30	935,5			10	2170,8
16 0	966,5			20	2182,8
				30	2194,9
				40	2207,0
				50	2219,1
				35 0	2231,2

φ	y	φ	y	φ	y
35° 0′	2231,2′	42° 0′	2766,5′	49° 0′	3364,9′
10	2243,4	10	2779,9	10	3380,1
20	2255,6	20	2793,4	20	3395,4
30	2267,8	30	2806,9	30	3410,7
40	2280,0	40	2820,4	40	3426,1
50	2292,3	50	2834,0	50	3441,5
36 0	2304,6	43 0	2847,6	50 0	3457,0
10	2316,9	10	2861,2	10	3472,6
20	2329,3	20	2874,9	20	3488,2
30	2341,7	30	2888,6	30	3503,8
40	2354,1	40	2902,4	40	3519,5
50	2366,5	50	2916,2	50	3535,3
37 0	2378,9	44 0	2930,0	51 0	3551,1
10	2391,4	10	2943,9	10	3567,0
20	2403,9	20	2957,8	20	3582,9
30	2416,5	30	2971,7	30	3598,9
40	2429,0	40	2985,7	40	3615,0
50	2441,6	50	2999,8	50	3631,1
38 0	2454,2	45 0	3013,8	52 0	3647,3
10	2466,9	10	3028,0	10	3663,5
20	2479,6	20	3042,1	20	3678,8
30	2492,3	30	3056,3	30	3696,1
40	2505,0	40	3070,6	40	3712,6
50	2517,8	50	3084,8	50	3729,0
39 0	2530,6	46 0	3099,2	53 0	3745,6
10	2543,4	10	3113,5	10	3762,2
20	2556,3	20	3128,0	20	3778,9
30	2569,2	30	3142,4	30	3795,6
40	2582,1	40	3156,9	40	3812,4
50	2595,1	50	3171,5	50	3829,4
40 0	2608,1	47 0	3186,1	54 0	3846,2
10	2621,1	10	3200,7	10	3863,2
20	2634,1	20	3215,4	20	3880,3
30	2647,2	30	3230,1	30	3897,5
40	2660,3	40	3244,9	40	3914,7
50	2673,5	50	3259,7	50	3932,0
41 0	2686,7	48 0	3274,6	55 0	3949,3
10	2699,9	10	3289,5	10	3966,8
20	2713,1	20	3304,5	20	3984,3
30	2726,4	30	3319,5	30	4001,8
40	2739,7	40	3334,6	40	4019,5
50	2753,1	50	3349,7	50	4037,2
42 0	2766,5	49 0	3364,9	56 0	4055,0

φ	y	φ	y	φ	y
56° 0′	4055,0′	63° 0′	4884,7′	70° 0′	5944,5′
10	4072,9	10	4906,7	10	5973,9
20	4090,9	20	4928,9	20	6003,4
30	4108,9	30	4951,2	30	6033,2
40	4127,0	40	4973,7	40	6063,3
50	4145,2	50	4996,2	50	6093,6
57 0	4163,5	64 0	5019,0	71 0	6124,2
10	4181,9	10	5041,8	10	6155,0
20	4200,3	20	5064,8	20	6186,1
30	4218,9	30	5087,9	30	6217,5
40	4237,5	40	5111,2	40	6249,1
50	4256,2	50	5134,6	50	6281,0
58 0	4275,0	65 0	5158,2	72 0	6313,2
10	4293,9	10	5181,9	10	6345,7
20	4312,8	20	5205,7	20	6378,5
30	4331,9	30	5229,8	30	6411,5
40	4351,1	40	5253,9	40	6444,9
50	4370,3	50	5278,2	50	6478,6
59 0	4389,6	66 0	5302,7	73 0	6512,7
10	4409,1	10	5327,4	10	6547,0
20	4428,6	20	5352,2	20	6581,7
30	4448,2	30	5377,1	30	6616,7
40	4467,9	40	5402,3	40	6652,1
50	4487,7	50	5427,6	50	6687,8
60 0	4507,7	67 0	5453,1	74 0	6723,9
10	4527,7	10	5478,7	10	6760,3
20	4547,8	20	5504,5	20	6797,1
30	4568,0	30	5530,6	30	6834,3
40	4588,3	40	5556,8	40	6871,9
50	4608,8	50	5583,1	50	6909,9
61 0	4629,3	68 0	5609,7	75 0	6948,4
10	4650,0	10	5636,5	10	6987,2
20	4670,7	20	5663,4	20	7026,4
30	4691,6	30	5690,6	30	7066,2
40	4712,6	40	5718,0	40	7106,3
50	4733,7	50	5745,5	50	7146,9
62 0	4754,9	69 0	5773,3	76 0	7188,0
10	4776,2	10	5801,3	10	7229,5
20	4797,7	20	5829,5	20	7271,6
30	4819,2	30	5857,9	30	7314,2
40	4840,9	40	5886,6	40	7357,2
50	4862,7	50	5915,4	50	7400,9
63 0	4884,7	70 0	5944,5	77 0	7445,0

φ	y	φ	y	φ	y
77° 0'	7445,0'	82° 0'	9122,9'	87° 0'	12499,4
10	7489,7	10	9195,5	10	12696,0
20	7535,0	20	9269,6	20	12904,5
30	7580,0	30	9345,4	30	13126,4
40	7627,4	40	9422,9	40	13363,7
50	7674,5	50	9502,1	50	13618,5
78 0	7722,3	83 0	9583,2	88 0	13893,7
10	7770,7	10	9666,3	10	14192,9
20	7819,8	20	9751,3	20	14520,6
30	7869,6	30	9838,6	30	14882,8
40	7920,1	40	9928,1	40	15287,7
50	7971,4	50	10019,9	50	15746,8
79 0	8023,4	84 0	10114,3	89 0	16267,8
10	8076,2	10	10211,3	10	16903,6
20	8129,8	20	10311,1	20	17670,7
30	8184,2	30	10413,9	30	18659,7
40	8239,5	40	10519,8	40	20053,6
50	8295,7	50	10629,1	50	22436,5
80 0	8352,8	85 0	10741,9	90 0	∞
10	8410,9	10	10858,6		
20	8469,9	20	10979,4		
30	8529,9	30	11104,5		
40	8591,0	40	11234,4		
50	8653,2	50	11369,4		
81 0	8716,6	86 0	11509,8		
10	8781,1	10	11656,2		
20	8846,8	20	11809,2		
30	8913,8	30	11969,2		
40	8982,2	40	12137,0		
50	9051,8	50	12313,5		
82 0	9122,9	87 0	12499,4		

Eine Tafel der Werthe von y für die verschiedenen Werthe von φ, mit Zugrundelegung des Bessel'schen Werthes der Abplattung von Hermann Wagner berechnet, findet sich auch im Anhange des dritten Jahrganges von Behms geogr. Handbuch (Gotha, Perthes, 1870) S. XLVI u. folg. Dieselbe schreitet aber durchweg blos von 30 zu 30' für φ fort.

4. Nachdem wir jetzt das Wichtigste über die Konstruktion der Mercator-Karten mitgetheilt haben, wollen wir jetzt noch die Ermittelung der Entfernung zweier Punkte, deren Projektionen gegeben sind, besprechen.

Sehr leicht ist es, die Länge des loxodromischen Bogens zwischen zwei Punkten A und B zu ermitteln. Derselbe bildet nämlich mit den verschiedenen Meridianen durchweg denselben Winkel α; legt man daher durch B den Parallelkreis, welcher den Meridian von A im Punkte A_1 schneidet, so ist

$$AA_1 = AB \cos \alpha \text{ oder } AB = AA_1 \sec \alpha.$$

Dies führt auf folgende einfache Konstruktion. Man zieht durch die Punkte A' und B' der Karte, welche die Punkte A und B der Kugel repräsentiren, die Meridiane und legt durch B' auch den Parallelkreis, welcher den Meridian von A' in B'_1 schneidet; man erhält dann in der Strecke $A'B'_1$ den Breitenunterschied der Punkte A und B. Hierauf misst man auf dem Aequator der Karte eine Länge von ebensoviel Graden etc. ab, trägt sie auf $A'B'_1$ von A' aus bis C' ab und legt dann durch den Punkt C' parallel zu den Parallelkreisen eine Gerade, welche $A'B'$ in C schneidet. Die Strecke $A'C$ giebt dann, auf dem Aequator gemessen, die Grösse des loxodromischen Bogens in Gradmaass an.

5. Indessen ist der loxodromische Bogen zwischen zwei Punkten nicht die kürzeste Entfernung derselben. Will man die letztere ermitteln, welche, für den Fall der Kugel, ein Bogen des grössten Kreises ist, der durch beide Punkte geht, so kann man von der Karte die Breiten φ und φ_1 und den Längenunterschied $\lambda - \lambda_1$ beider Punkte A und B entnehmen und entweder die Grösse dieses Bogens in Gradmaass nach dem auf S. 40 auseinandergesetzten Verfahren berechnen oder auch statt dessen ein einfaches graphisches Verfahren anwenden.

Es sei M der Mittelpunkt der Kugel, Q der Pol, in welchem eine Tangentialebene an die Kugel gelegt sei, welche von den Verlängerungen der Halbmesser MA und MB in A' und B' geschnitten werde. Dann kann man das bei Q rechtwincklige Dreieck MQA' leicht konstruiren, indem man MQ gleich dem Halbmesser der Kugel oder gleich 57,2958 Aequatorgrad der Mercator-Karte und Winkel $QMA' = 90^0 - \varphi$ macht; in gleicher Weise findet man das Dreieck MQB', in welchem auch MQ gleich dem Halbmesser und Winkel $QMB' = 90^0 - \varphi_1$ ist. Damit sind nun die Seiten QA' und QB' gegeben, die man unter dem Winkel $\lambda - \lambda_1$ zusammenstellt, so dass das Dreieck $QA'B'$ entsteht. Ueber der Seite $A'B'$ konstruirt man dann ein Dreieck $A'B'N$, in welchem $A'N = A'M$ und $B'N = B'M$ ist und schlägt um N mit dem Halbmesser der Kugel einen Kreisbogen; das innerhalb des Dreiecks, zwischen NA' und NB' liegende Stück desselben ist an Länge dem Bogen AB der Kugel gleich. — Vergl. das in der Nr. 12 des §. 8 (S. 55) Gesagte.

§. 22.

Lambert's konforme Kegelprojektion.

1. Auch diese Projektion ist bereits früher, §. 15, VII (Seite 153 u. folg.) für den Fall der Kugel besprochen worden; es han-

delt sich jetzt hauptsächlich darum, zu sehen, wie die Formeln sich für den Fall eines Ellipsoides gestalten.

2. Wir setzen zunächst in den Formeln (11) des §. 20

$$f_1 = 0 \text{ und } f(u \pm i\lambda) = e^{-\mu(u \pm i\lambda)}$$
$$= e^{-\mu u} (\cos \lambda \mp i \sin \mu\lambda).$$

Man erhält dann

$$(1) \qquad x = e^{-\mu u} \cos \mu\lambda \text{ und } y = e^{-\mu u} \sin \mu\lambda.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, wenn man die Entfernung vom Koordinatenanfange

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

setzt,

$$r = e^{-\mu u},$$

das ist, wenn man für u den durch die Formel (4) des §. 20 gegebenen Werth setzt

$$r = \left[K \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - \varepsilon \sin \varphi}{1 + \varepsilon \sin \varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \right]^{-\mu},$$

wofür man auch setzen kann

$$(2) \quad r = C \tan^{\mu}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi}\right)^{\frac{\mu\varepsilon}{2}} = C \tan^{\mu} \frac{\zeta}{2},$$

wenn man $K^{-\mu}$ kurzweg mit C und mit ζ die „korrigirte Poldistanz“ [vergl. die Nr. 3 und speziell Formel (15) des §. 20] bezeichnet.

Da dieser Werth von r sich nicht ändert, so lange φ ungeändert bleibt, so werden die Parallelkreise durch Bogen koncentrischer Kreise dargestellt, deren Mittelpunkt der Koordinatenanfang ist.

3. Aus der Gleichung (1) folgt ferner

$$\frac{y}{x} = \tan \mu\lambda.$$

Nennt man nun ψ den Winkel, welcher zwischen der x-Achse und der Geraden liegt, die nach dem Punkte mit den Koordinaten x und y hingeht, so ist

$$\frac{y}{x} = \tan \psi$$

und mithin

$$(3) \qquad \psi = \mu\lambda.$$

Alle Orte gleicher Länge haben also denselben Werth von ψ, d. h. jeder Meridian wird durch eine vom Koordinatenanfange ausgehende Gerade auf der Karte dargestellt, und zwar sind die Winkel, welche die Meridiane der Karte unter sich einschliessen das

μ-fache von den Längenunterschieden der Meridiane auf dem Sphäroid. Der Koordinatenanfang stellt den Pol dar.

4. Was die Linearvergrösserung anlangt, so ist $f'(u) = -\mu f(u)$ und daher zufolge (13) in §. 20

$$\varkappa = \frac{\mu e^{-\mu u}}{r_1} = \frac{\mu r}{r_1},$$

d. i., wenn man für r den obenstehenden Werth (2) und für r_1 den Werth S. 42

$$r_1 = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}$$

einsetzt,

$$(4) \quad \varkappa = \frac{\mu\, C \tan^{\mu}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi}\right)^{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}{a \cos \varphi}.$$

5. Das Vergrösserungsverhältniss $\varkappa$ ist also nicht von der Länge abhängig, sondern längs eines und desselben Parallelkreises konstant.

Um seine Veränderlichkeit mit der Breite zu erkennen, differentiiren wir die vorstehende Formel nach φ und können das Resultat in der Form

$$\frac{d\varkappa}{d\varphi} = -\frac{\mu a (1 - \varepsilon^2) r}{r_1^2} \cdot \frac{\mu - \sin \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}^3}$$

darstellen. Hier ist nun der Faktor

$$-\frac{\mu a (1 - \varepsilon^2) r}{r_1}$$

negativ, der Divisor $\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}^3$ positiv, und also hängt das Vorzeichen lediglich von dem Faktor $\mu - \sin \varphi$ ab, welcher positiv, Null oder negativ ist, je nachdem $\sin \varphi < \mu$, $\sin \varphi = \mu$ oder $\sin \varphi > \mu$ ist. Sonach ist

$$\frac{d\varkappa}{d\varphi} \lesseqgtr 0, \text{ je nachdem } \sin \varphi \lesseqgtr \mu,$$

d. h. die Grösse $\varkappa$, welche für $\varphi = 0$ den Werth $\frac{\mu C}{a}$ hat, nimmt mit wachsenden Werthen von φ stetig ab, bis dieselbe für

$$\varphi = \operatorname{Arcsin} \mu$$

ihren kleinsten Werth erreicht, welcher

$$= \frac{\mu C}{a \sqrt{1 - \mu^2}} \left(\frac{1 - \mu}{1 + \mu}\right)^{\frac{\mu}{2}} \left(\frac{1 + \varepsilon \mu}{1 - \varepsilon \mu}\right)^{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \mu^2}$$

ist; von da an wächst die Grösse $\varkappa$ wieder. Natürlich ist hierbei vorausgesetzt, dass μ ein echter Bruch ist.

6. In unseren Hauptformeln (2) und (3) kommen zwei Konstante vor, C und μ. Von der ersteren sieht man sofort ein, dass sie lediglich den Maassstab der Karte bestimmt.

Was μ anlangt, so haben wir die Rolle, die diese Grösse auf der Karte spielt, schon in Gleichung (3) kennen gelernt.

Lambert hat diese Konstante, wie schon S. 157 erwähnt, so bestimmt, dass für zwei bestimmte Breiten φ' und φ'' die Längengrade auf der Karte und auf dem Ellipsoide in gleichem Verhältnisse stehen. Sind r' und r'' die Radien, mit denen diese Parallelkreise auf der Karte beschrieben sind, also

$$r' = C \tan^{\mu} \frac{\zeta'}{2}, \quad r'' = C \tan^{\mu} \frac{\zeta''}{2},$$

dagegen

$$r_1' = \frac{a \cos \varphi'}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi'}} \text{ und } r_1'' = \frac{a \cos \varphi''}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi''}}$$

die Radien der Parallelkreise auf dem Sphäroid, so fordert die von Lambert gestellte Bedingung, dass die Gleichung

$$\frac{r'}{r''} = \frac{r_1'}{r_1''}$$

oder

$$\left(\frac{\tan \frac{\zeta'}{2}}{\tan \frac{\zeta''}{2}}\right)^{\mu} = \frac{\cos \varphi' \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi''}}{\cos \varphi'' \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi'}}$$

bestehe. Nimmt man in dieser Gleichung beiderseits Logarithmen (gleichgültig welchen Systems), so erhält man schliesslich zur Berechnung von μ die Formel

$$(5) \quad \mu = \frac{\log \cos \varphi' - \log \cos \varphi'' + \log \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi'} - \log \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi''}}{\log \tan \frac{\zeta'}{2} - \log \tan \frac{\zeta''}{2}}.$$

Man wählt öfters als φ' und φ'' die geringste und grösste Breite des darzustellenden Gebietes.

Handelt es sich z. B. um die Darstellung von Europa, so kann man $\varphi' = 30^0$ und $\varphi'' = 70^0$ nehmen und erhält dann (die Erde als kugelförmig vorausgesetzt) für μ den Werth

$$\mu = 0{,}78327;$$

die Winkel am Pole betragen also auf der Karte etwas über $\frac{3}{4}$ der wirklichen Grösse auf der Erde, 10 Längengrade sind durch einen Bogen von $7^0\ 49'\ 58''$ repräsentirt und das Minimum von $\varkappa$ fällt auf $51^0\ 34'$ Breite.

Es kann aber auch zweckmässig erscheinen, φ' und φ'' so zu wählen, dass der Meridianbogen zwischen den äussersten Parallelen in drei nahezu gleiche Theile getheilt wird.

Ein anderes Princip besteht darin, μ so zu wählen, dass die Vergrösserung $\varkappa$ für eine gewisse Breite φ' ihren kleinsten Werth erreicht. Wir wissen schon, dass dann

$$\mu = \sin \varphi'$$

sein muss. Wenn man z. B. $\mu = \frac{3}{4}$ nimmt, so tritt das Minimum von $\varkappa$ für $\varphi' = 48^0\ 35'\ 25''$ ein.

Zur Konstruktion von Sternkarten kann es zweckmässig erscheinen, μ so zu wählen, dass r doppelt so gross wird für den Aequator als für den Parallel von 45^0. Man erhält dann $\mu = 0{,}78643$, ein Werth, welcher nur sehr wenig von dem oben erwähnten $\mu = 0{,}78327$ abweicht.

7. Mit den vorstehenden Formeln sind die wesentlich für die Konstruktion der Karte nothwendigen Elemente alle gegeben. Die Werthe von r kann man sehr leicht mittels der Formel

$$r = C \tan^{\mu} \frac{\zeta}{2}$$

berechnen, wenn man zunächst zu den Werthen von $\chi = 90^0 - \varphi$ die in der Tabelle am Schlusse des §. 20 verzeichneten Werthe von $\zeta - \chi$ addirt und so die korrigirten Poldistanzen ζ ermittelt hat.

Für den Fall, dass das Centrum O über den Rand der Karte hinausfällt, wird man sich zunächst auf dem ersten Meridiane die einzelnen Theile, Grade etc. auftragen, dann irgend einen Parallelkreis durch Koordinaten einzelner Punkte konstruiren, durch diese einzelnen Punkte die durch die Winkel $\psi = \mu\lambda$ hinlänglich bestimmten Meridiane legen und schliesslich auf den letzteren dieselben Theile abtragen, wie auf dem ersten Meridiane, worauf man nur noch die Punkte gleicher Breite zu verbinden braucht, um die verschiedenen Parallelkreise zu erhalten.

Was die Koordinaten anlangt, so ist zufolge Gleich. (1)

$$x = r \cos \mu\lambda \text{ und } y = r \sin \mu\lambda,$$

wobei x auf dem ersten Meridiane, und zwar vom Pole aus, gerechnet ist. Fällt dieser Punkt ausserhalb der Karte, so muss man einen neuen Koordinatenanfang wählen, und wenn dieser um x_0 vom alten absteht, so sind die neuen Koordinaten

$$x' = r \cos \mu\lambda - x_0 \text{ und } y = r \sin \mu\lambda.$$

8. Wir wollen noch kurz zeigen, wie man die Formeln für diese Projektion direkt erhalten kann, ohne auf die allgemeinen Gleichungen des §. 20 zurückzugehen.

Es wird eine konforme Abbildung der Oberfläche des Rotationsellipsoides in einer Ebene gesucht unter den Bedingungen,

- dass die Meridiane durch gerade, vom Pole ausgehende Linien dargestellt werden;
- dass die Längen ψ auf der Karte das μ-fache von denen des Ellipsoides sind, und
- dass die Parallelkreise durch Bogen koncentrischer Kreise dargestellt werden, deren gemeinsames Centrum der Pol ist.

Ist r der Radius des Parallels von der Breite φ auf der Karte, dr seine verschwindend kleine Zunahme, $r\,d\psi = \mu r\,d\lambda$ das Bogenelement des Parallelkreises, ds das Meridianelement auf dem

Ellipsoid, $r_1 d\lambda$ das Parallelkreiselement auf dem Ellipsoid, so ist die Bedingung der Konformität

$$\frac{dr}{\mu r d\lambda} = \frac{ds}{r_1 d\lambda}$$

oder kurz

$$\frac{dr}{r} = \frac{\mu ds}{r_1}.$$

Setzt man nun

$$r_1 = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}, \quad ds = \frac{-a(1 - \varepsilon^2)\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}},$$

wo wir das Zeichen — setzen, weil mit wachsenden Werthen von φ der Radius r abnimmt, so geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{dr}{r} = -\mu(1 - \varepsilon^2) \frac{d\varphi}{\cos \varphi (1 - \varepsilon^2 \sin \varphi)}$$

und wenn man integrirt und beachtet, dass

$$-\int \frac{(1 - \varepsilon^2)\, d\varphi}{\cos \varphi (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)}$$

$$= l \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\, l \left(\frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi}\right) + lK$$

ist, so erhält man

$$lr = \mu l \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} K\right]$$

oder, wenn man die μte Potenz der Integrationskonstanten K durch C bezeichnet und von den Logarithmen zu den Zahlen selbst übergeht

$$r = C \tan^{\mu}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 + \varepsilon \sin \varphi}{1 - \varepsilon \sin \varphi}\right)^{\frac{\mu\varepsilon}{2}},$$

identisch mit Gleichung (2) dieses Paragraphen.

Das Vergrösserungsverhältniss $\varkappa$ ist, wie man unmittelbar erkennt, durch die Gleichung

$$\varkappa = \frac{dr}{-ds} = \frac{\mu r d\lambda}{r_1 d\lambda} = \frac{\mu r}{r_1}$$

bestimmt.

9. Diese Projektion ist zuerst von I. H. Lambert in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung", Berlin 1772, Nr. VI, S. 105 bis 199 gegeben worden. Später hat Gauss auf dieselbe aufmerksam gemacht in seiner berühmten Abhandlung „Allgemeine Auflössung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird", welche 1822 den Preis der Kopenhagener Akademie erlangte und im dritten Hefte der von Schumacher herausgegebenen „Astronomischen Abhandlungen" (Altona 1825) abgedruckt

ist. Gauss leitet die Gleichungen dieser Projektion dort aus den allgemeinen Formeln als einen speciellen Fall ab, bemerkt aber ausdrücklich, dass diese Projektion schon bekannt, namentlich auf Tafel XIX bis XXVI des von Harding in den Jahren 1808 — 22 veröffentlichten Himmels-Atlas in Anwendung gebracht sei.

Später hat u. A. die Geographische Gesellschaft in Petersburg diese Projektion angewandt zur Konstruktion der im Mai 1862 publicirten Karte des europäischen Russlands und des Kaukasus (12 Blatt im Maassst. 1 : 1680000) und ihr den Namen „Gauss'sche Projektion" beigelegt. Diese Karte erstreckt sich von 36 bis 68° Breite, die Konstante μ ist mittels der Formel (5) unter der Annahme $\varphi' = 46^0$ und $\varphi'' = 58^0$ berechnet.

10. Die Hauptvorzüge dieser Darstellungsweise bestehen
- in der Leichtigkeit der Konstruktion des Netzes;
- in der Aehnlichkeit zwischen den kleinsten Theilen auf der Karte und auf der Erde selbst, namentlich in der überall — mit alleiniger Ausnahme des Poles — richtigen Abbildung der Winkel; und
- in der Gleichheit der Meridianbögen zwischen denselben Parallelen.

Diese Darstellungsweise ist daher sehr geeignet für Länder von grosser Längenerstreckung. Der Maassstab wird dann mit grosser Genauigkeit erhalten, wenn man den Mittelmeridian in Kilometer, Meilen oder dergl. eintheilt. Bei nicht gar zu grossen Breitenunterschieden ändert sich dieser Maassstab nur mässig. Auf der erwähnten russischen Karte tritt z. B. unter dem mitteleren Parallel von 52° eine Verkürzung auf 0,994, unter den äussersten Parallelen aber eine Vergrösserung auf 1,031, beziehentlich 1,040 ein.

§. 23.

Die Lagrange'sche Projektion.

1. In den beiden Gleichungen

$$x + iy = F(u + i\lambda)$$
$$x - iy = F_1(u - i\lambda),$$

welche wir in §. 20 kennen gelernt haben, wollen wir die beiden Funktionen F und F_1 als identisch annehmen, und zwar mag

$$(1)\quad F(u + i\lambda) = x + iy = \frac{e^{-c(u+i\lambda)}}{Ae^{c(u+i\lambda)} + Be^{-c(u+i\lambda)}}$$

sein. Multiplicirt man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung mit

$$Ae^{c(u-i\lambda)} + Be^{-c(u-i\lambda)},$$

so erhält man das Resultat

$$x + iy = \frac{Be^{-2cu} + Ae^{-2ic\lambda}}{A^2e^{2cu} + AB\left(e^{2ic\lambda} + e^{-2ic\lambda}\right) + Be^{-2cu}}.$$

Hier ist im Zähler

$$e^{-2ic\lambda} = \cos 2c\lambda - i \sin 2c\lambda$$

und im Nenner

$$e^{2ic\lambda} + e^{-2ci\lambda} = 2 \cos 2c\lambda,$$

der Nenner ist also reell. Setzt man nun das Reelle links dem Reellen rechts und ebenso das Imaginäre links dem Imaginären rechts gleich, so erhält man für x und y die beiden Gleichungen

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{A \cos 2c\lambda + Be^{-2cu}}{A^2 e^{2cu} + 2AB \cos 2c\lambda + Be^{-2cu}} \\ y &= \frac{-A \sin 2c\lambda}{A^2 e^{2cu} + 2AB \cos 2c\lambda + Be^{-2cu}}. \end{aligned} \right.$$

2. Es handelt sich nun darum, aus diesen zwei Gleichungen einmal die Breite φ, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Grösse u [Formel (4) des §. 20] zu eliminiren, um die Gleichung derjenigen Kurve zu erhalten, welche den Meridian von der Länge λ repräsentirt; dann aber gilt es umgekehrt, λ zu eliminiren, um die Gleichung derjenigen Kurve zu erhalten, welche den Parallelkreis von der Breite φ darstellt. Um uns diese Eliminationen zu erleichtern, quadriren wir die Gleichungen (2) zuvörderst und addiren sie alsdann; wir erhalten dadurch

$$x^2 + y^2 = \frac{e^{-2cu}}{A^2 e^{2cu} + 2AB \cos 2c\lambda + B^2 e^{-2cu}}.$$

Indem wir nun mit dieser Gleichung in jede der beiden Gleichungen (2) dividiren, ergeben sich die neuen Gleichungen

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{x^2 + y^2} &= Ae^{2cu} \cos 2c\lambda + B \\ \frac{y}{x^2 + y^2} &= -Ae^{2cu} \sin 2c\lambda. \end{aligned} \right.$$

3. Die Elimination von e^{2cu} aus diesen beiden Formeln liefert die Gleichung

$$(4) \qquad x^2 + y^2 - \frac{y}{B} \cot 2c\lambda - \frac{x}{B} = 0.$$

Da man dieselbe auf die Form

$$\left(x - \frac{1}{2B}\right)^2 + \left(y - \frac{\cot 2c\lambda}{2B}\right)^2 = \left(\frac{1}{2B \sin 2c\lambda}\right)^2$$

bringen kann, so ist die betreffende Kurve ein Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten

$$x_0 = \frac{1}{2B}, \; y_0 = \frac{\cot 2c\lambda}{2B}$$

besitzt und dessen Halbmesser

$$\varrho = \frac{1}{2B \sin 2c\lambda}$$

ist.

Da die Gleichung (4) sowohl durch die Koordinaten $x = 0$ und $y = 0$, als auch durch $x = \frac{1}{B}$ und $y = 0$ befriedigt wird, so gehen alle durch (4) ausgedrückte Kreise durch den Koordinatenanfang, den wir mit Q' bezeichnen wollen und durch den auf der x-Achse in der Entfernung $\frac{1}{B}$ gelegenen Punkt Q'_1.

Es werden sonach alle Meridiane durch Kreise dargestellt, welche sich in zwei festen, auf der x-Achse gelegenen Punkten Q' und Q'_1, welche die Pole repräsentiren, schneiden.

Die x-Achse selbst repräsentirt den ersten Meridian.

4. Wir wollen jetzt die Grösse λ, die Länge, aus den beiden Gleichungen (3) eliminiren. Das Resultat der Elimination ist

$$x^2 + y^2 + \frac{2Bx}{A^2 e^{4cu} - B^2} - \frac{1}{A^2 e^{4cu} - B^2} = 0, \tag{5}$$

und diese Gleichung bedeutet einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse, in der Entfernung

$$-\frac{B}{A^2 e^{4cu} - B^2}$$

vom Koordinatenanfange liegt und dessen Halbmesser den Werth

$$\varrho_1 = \frac{A e^{2cu}}{A^2 e^{4cu} - B^2}$$

hat.

Es ist leicht, diese Kreise noch weiter zu charakterisiren. Bezeichnet man den Mittelpunkt eines solchen Kreises mit M, so ist

$$MQ' = \frac{B}{A^2 e^{4cu} - B^2},$$

folglich

$$MQ'_1 = MQ' + Q'Q'_1 = \frac{B}{A^2 e^{4cu} - B^2} + \frac{1}{B}$$

$$= \frac{A^2 e^{4cu}}{(A^2 e^{4cu} - B^2)B}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$MQ' \cdot MQ'_1 = \varrho_1^2, \tag{6}$$

und diese Gleichung drückt dem auf S. 19 unten Gesagten zufolge aus, dass der Durchmesser des fraglichen Kreises durch die beiden Punkte Q' und Q'_1 harmonisch getheilt wird.

Wir können das Ergebniss dieser Nummer in die Worte fassen:

Die Abbildungen der Parallelkreise sind wieder Kreise, deren Mittelpunkte auf der geraden Linie liegen, welche durch die Abbildungen der beiden Pole geht und deren Durchmesser durch diese beiden Punkte harmonisch getheilt werden.

5. Was endlich die Linearvergrösserung $\varkappa$ anlangt, so hat man zufolge Gleich. (1) dieses Paragraphen

$$F'(u) = \frac{-2\,Ac}{Ae^{cu} + Be^{-cu}}$$

und mit Berücksichtigung dieser Formel liefert uns die Gleichung (12). des §. 20 den Werth

$$(7) \qquad \varkappa = \frac{-2\,Ac\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}{\left[A^2 e^{2cu} + 2\,AB \cos 2c\lambda + B^2 e^{-2cu}\right] a \cos\varphi}.$$

Damit sind alle die Projektion charakterisirenden Gleichungen gefunden und es handelt sich nunmehr blos noch darum, dieselben für die Konstruktion bequemer zu gestalten und daraus die Konstruktionsregeln abzuleiten.

6. Wir wollen die Entfernung der beiden Punkte Q' und Q'_1, welche die Pole darstellen, durch $2d$ ausdrücken, also

$$d = \frac{1}{2B}$$

setzen. Die Gleichung (4) geht dann über in

$$(8) \qquad x^2 + y^2 - 2dy \cot 2c\lambda - 2dx = 0.$$

Der Mittelpunkt des Kreises, der durch diese Gleichung ausgedrückt wird, hat die Koordinaten

$$x_0 = d,\ y_0 = d \cot 2c\lambda,$$

sein Halbmesser ist

$$\varrho = d \operatorname{cosec} 2c\lambda,$$

und wenn N den Halbirungspunkt von $Q'Q'_1$ bedeutet und M und M' die beiden Punkte sind, in denen der Kreis (8) die in N auf OQ errichtete Senkrechte schneidet, so ist

$$NM = -\,d \tan c\lambda \text{ und } NM' = +\,d \cot c\lambda.$$

7. Die Konstruktion eines Meridianes von der Länge λ hat hiernach, sobald man über die Konstanten c und d bereits Verfügung getroffen, keinerlei Schwierigkeit.

Man halbirt in N die Entfernung $Q'Q'_1$ der beiden Pole, errichtet in N eine Senkrechte auf $Q'Q'_1$, trägt in Q' oder Q'_1 an $Q'Q'_1$ den Winkel $90^0 - 2c\lambda$ auf und verlängert den zweiten Schenkel dieses Winkels bis zum Durchschnittspunkte mit der erwähnten Senkrechten; dieser Schnittpunkt ist der Mittelpunkt desjenigen durch Q' und Q'_1 gehenden Kreises, welcher den in Rede stehenden Meridian darstellt, und zwar entspricht der Bogen

$Q'MQ'_1$ der Länge λ, der andere Bogen $Q'M'Q'_1$ dagegen der Länge $\lambda + 180^0$.

Fig. 65.

8. Wir wenden uns nun zur **Konstruktion der Parallelkreise.** Zu dem Zwecke nehmen wir wieder die obige Gleichung (5) zur Hand, in welche wir den Werth

$$B = \frac{1}{2d}$$

einsetzen. Ausserdem haben wir vermöge der Formel (4) des §. 20 für e^{4cu} den Werth

$$e^{4cu} = K^{4c} \cot^{4c} \frac{\zeta}{2},$$

wo ζ die korrigirte Poldistanz bezeichnet, welche für den Fall der Kugel dem Komplement der Breite, $90^0 - \varphi = \chi$ gleich kommt.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$2dAK^{2c} = \alpha,$$

so nimmt die fragliche Gleichung die Form an

$$\text{(9)} \quad x^2 + y^2 + \frac{4dx}{\alpha^2 \cot^{4c} \frac{\zeta}{2} - 1} - \frac{4d^2}{\alpha^2 \cot^{4c} \frac{\zeta}{2} - 1} = 0,$$

und diese Gleichung drückt einen Kreis aus, dessen Mittelpunkt auf dem ersten Meridiane in der Entfernung

$$\text{(10)} \qquad \xi = - \frac{2d}{\alpha^2 \cot^{4c} \frac{\zeta}{2} - 1}$$

vom Pole Q' liegt, wobei als positiv die Richtung $Q'Q'_1$ gerechnet ist; der Halbmesser dieses Kreises ist

$$\text{(11)} \qquad \varrho_1 = \frac{2d\alpha \cot^{2c} \frac{\zeta}{2}}{\alpha^2 \cot^{4c} \frac{\zeta}{2} - 1}$$

und die beiden Punkte, in denen er die Verbindungslinie der Pole Q' und Q'_1 schneidet, haben die Abscissen

$$\text{(12)} \qquad x' = \frac{2d}{\alpha \cot^{2c} \frac{\zeta}{2} + 1}, \quad x'' = \frac{-2d}{\alpha \cot^{2c} \frac{\zeta}{2} - 1}.$$

Zur näheren Bestimmung der Konstanten α kann man nun folgenden Weg einschlagen.

Wir nehmen an, dass ein bestimmter Parallelkreis von bekannter Breite, dessen korrigirte Poldistanz ζ_0 bezeichnet werden

mag die Entfernung $Q'Q'_1 = 2d$ gerade halbirt, dass also $x' = d$ ist. Dies giebt für α den Werth

$$\alpha = \tan^{2c} \frac{\zeta_0}{2}, \tag{13}$$

woraus folgt, dass $x'' = -\infty$ ist, der betreffende Parallelkreis also auf der Karte in eine Gerade degenerirt (in die Gerade, auf welcher die Centra der Meridiane liegen). Mit Benutzung dieses Werthes von α gehen die Gleichungen (9) bis (12) über in

$$x^2 + y^2 + \frac{4n^2\,dx}{1-n^2} - \frac{4d^2n^2}{1-n^2} = 0, \tag{9a}$$

$$\xi = -\frac{2n^2 d}{1-n^2}, \tag{10a}$$

$$\rho_1 = \frac{2nd}{1-n^2}, \tag{11a}$$

$$x' = \frac{2nd}{1+n}, \quad x'' = \frac{-2nd}{1-n} \tag{12a}$$

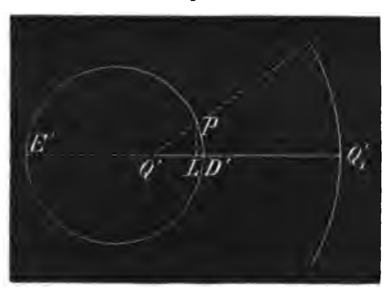
wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$n = \tan^{2c} \frac{\zeta}{2} \cdot \cot^{2c} \frac{\zeta_0}{2}.$$

Um nun die Parallelkreise zu konstruiren, berechne man sich einfach die Werthe von ξ, also die Lage des Mittelpunktes, und den Halbmesser ρ_1 und führe auf Grund der gefundenen Zahlwerthe die Zeichnung aus.

9. Auf der Kugel oder dem Sphäroid werden die Parallelkreise von den Meridianen in Theile geschnitten, welche den Längenunterschieden proportional sind. Dies ist bei der Langrange'schen Konstruktion nicht mehr der Fall.

Fig. 66.



Bezeichnet aber D' den zwischen Q' und Q'_1 liegenden Schnittpunkt eines Parallelkreises und des ersten Meridianes, ist also

$$Q'D' = x' = \frac{2nd}{1+n}$$

und also

$$D'Q'_1 = 2d - x' = \frac{2d}{1+n},$$

ferner P ein beliebiger Punkt dieses Parallelkreises, so ist es leicht die Grösse des Winkels $PQ'Q'_1$ anzugeben. Sind nämlich $Q'L = x$ und $LP = y$ die Koordinaten des Punktes P, so ist der Gleich. (2) gemäss

$$\tan PQ'Q'_1 = \frac{y}{x} = \frac{-A \sin 2c\lambda}{A \cos 2c\lambda + Be^{-cu}}.$$

Sieht man von dem Minuszeichen ab und setzt für A und Be^{-cu} ihre Werthe ein, so erhält man

$$\tan PQ'Q'_1 = \frac{\sin 2c\lambda}{n + \cos 2c\lambda},$$

d. i., wenn man Zähler und Nenner mit $D'Q'_1 = \frac{2d}{1+n}$ multiplicirt,

$$\tan PQ'Q'_1 = \frac{D'Q'_1 \sin 2c\lambda}{Q'D' + D'Q'_1 \cos 2c\lambda}.$$

Dies giebt folgende Konstruktion:

Um den Punkt P eines gegebenen, den ersten Meridian in D' schneidenden Parallelkreises zu finden, welcher der Länge λ entspricht, schlage man um D' einen Kreis mit dem Halbmesser $D'Q'_1$, trage dann den Centriwinkel $Q'_1D'R = 2c\lambda$ ab und ziehe die Gerade $Q'R$, welche durch den gesuchten Punkt P geht.

Hiernach dient der durch Q'_1 gehende Kreis um D' als Theilkreis für den gegebenen Parallelkreis; indem man auf dem ersteren die verschiedenen Werthe von $2c\lambda$, welche verschiedenen Längen λ entsprechen, aufträgt und die betreffenden Punkte mit Q' verbindet, wird der Parallelkreis diesen Längen entsprechend eingetheilt. Man kann sich dieses Verfahrens bedienen, um die auf den verschiedenen Parallelkreisen liegenden Punkte eines Meridianes zu finden und dann den Meridian durch Verbindung dieser Punkte zu zeichnen, für den Fall, dass der Mittelpunkt über die Zeichenebene hinausfällt.

Da es für solche Fälle auch erwünscht sein kann, einzelne Punkte durch ihre Koordinaten zu konstruiren, so mögen hier noch die Umwandelungen der beiden Gleichungen (2) Platz finden:

$$(14)\quad \begin{cases} x = \dfrac{2dn(\cos 2c\lambda + n)}{1 + 2n\cos 2c\lambda + n^2} \\ y = \dfrac{-2dn \sin 2c\lambda}{1 + 2n\cos 2c\lambda + n^2}, \end{cases}$$

wo

$$n = \tan^{2c}\frac{\zeta}{2}\cot^{2c}\frac{\zeta_0}{2}$$

ist.

10. Wir wenden uns nun zu dem Vergrösserungs-Koefficienten $\varkappa$, dessen in Formel (7) angegebener Werth sich auf die Form bringen lässt

$$(15)\quad \varkappa = \frac{-4cd\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}}{a\cos\varphi\left[\tan^{2c}\frac{\zeta_0}{2}\cot^{2c}\frac{\zeta}{2} + 2\cos 2c\lambda + \cot^{2c}\frac{\zeta_0}{2}\tan^{2c}\frac{\zeta}{2}\right]}.$$

Dieser Werth ist sowohl von λ als von φ abhängig.

Was zuerst die Abhängigkeit von λ anlangt, so hat $\varkappa$ jedenfalls seinen kleinsten Werth, wenn das Glied $2\cos 2c\lambda$ im Nenner seinen grössten Werth, d. i. den Werth 2, erreicht, was für $\lambda = 0$ eintritt.

Die geringste Vergrösserung auf jedem Parallelkreise findet also auf dem ersten Meridiane statt.

Um nun das absolute Minimum des Verhältnisses $\varkappa$ zu ermitteln, können wir $\lambda = 0$ setzen; beschränken wir uns dann noch auf den Fall der Kugel, so geht ζ in $90^0 - \varphi = \chi$ über und wir haben für das Vergrösserungsverhältniss auf dem ersten Meridiane den Werth

$$(15a) \qquad \varkappa = \frac{4cd}{a \sin\chi \left(\tan^c \frac{\chi_0}{2} \cot^c \frac{\chi}{2} + \cot^c \frac{\chi_0}{2} \tan^c \frac{\chi}{2}\right)^2}$$

und dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn die Wurzel aus dem Nenner, also der Ausdruck

$$(16) \qquad \sqrt{\sin\chi} \left(\tan^c \frac{\chi_0}{2} \cot^c \frac{\chi}{2} + \cot^c \frac{\chi_0}{2} \tan^c \frac{\chi}{2}\right)$$

ein Maximum wird. Um den Werth von χ zu finden, für welchen dies stattfindet, hat man nach χ zu differentiiren und das Resultat gleich Null zu setzen. Nach einigen leichten Reduktionen giebt dies die Gleichung

$$(17) \qquad \left(\tan \frac{\chi}{2} \cot \frac{\chi_0}{2}\right)^{2c} = \frac{2c - \cos\chi}{2c + \cos\chi}$$

Nun ist aber zufolge Gleichung (12)

$$\left(\tan \frac{\chi}{2} \cot \frac{\chi_0}{2}\right)^{2c} = \frac{x'}{2d - x'};$$

d. h. das Minimum von $\varkappa$ tritt ein für denjenigen zwischen Q' und Q'_1 gelegenen Ort P', für welchen

$$\frac{Q'P'}{P'Q'_1} = \frac{2c - \cos\chi}{2c + \cos\chi}$$

ist.

Hieraus ist ersichtlich, dass wenn man den Punkt P auf der Erde wählt, für welchen man die Grösse $\varkappa$ zu einem Minimum machen will und in dessen Nähe dann $\varkappa$ sich am schwächsten ändert, und wenn man den entsprechenden Punkt P' auf der Karte annimmt, so dass man also das Verhältniss

$$\frac{Q'P'}{P'Q'_1} = \mu$$

kennt, alsdann der Werth der Konstanten c bestimmt ist; denn man hat

$$(18) \qquad 2c = \frac{1+\mu}{1-\mu} \cos\chi.$$

11. Man kann aber die Konstante c noch auf eine andere Weise, als die vorstehende bestimmen. Setzt man nämlich den Werth (17) in die Formel (15a) ein, so erhält man denjenigen Werth von $\varkappa$, welcher das Minimum bildet, nämlich

$$\varkappa_0 = \frac{cd\,(4c^2 - \cos^2\chi)}{4a \sin\chi}.$$

Dieser Werth ist selbst wieder von c und χ abhängig und man kann daher verlangen, dass c und φ oder χ in einer solchen Beziehung zu einander stehen, dass für den bestimmten Werth von χ mit einer verschwindend kleinen Aenderung von χ keine Aenderung von $\varkappa_0$ verbunden, also

$$\frac{d\varkappa_0}{d\chi} = 0$$

sei. Dies wird die Folge haben, dass überhaupt in der Nähe dieses Werthes von χ die Aenderung von $\varkappa_0$ nur unbedeutend, also der Maassstab im Wesentlichen ein und derselbe sein wird.

Nun ist

$$\frac{d\varkappa_0}{d\chi} = \frac{cd\,(1 + \sin^2\chi - 4c^2)\cos\chi}{4\,a\,\sin^2\chi}$$

und dieser Ausdruck wird der Null gleich, wenn man

$$4c^2 = 1 + \sin^2\chi,$$

also

$$2c = \sqrt{1 + \sin^2\chi} \tag{19}$$

setzt.

12. Um also ein derartiges Kartennetz zu zeichnen, wird man sich erst über denjenigen Punkt schlüssig zu machen haben, in dessen Umgebung der Maassstab der Karte sich möglichst wenig ändern soll. Ist χ_1 die Poldistanz dieses Punktes, so bestimmt man zuerst die Konstante c mittels der Gleichung

$$2c = \sqrt{1 + \sin^2\chi_1}.$$

Ist z. B. $\chi_1 = 40^0$, also $\sin\chi_1 = 0{,}6428$, so erhält man $c = 0{,}5944$.

Hierauf nimmt man die Entfernung $Q'Q'_1 = 2d$ der beiden Pole auf der Karte beliebig an, wodurch der Maassstab der letzteren bedingt ist, und theilt dieselbe durch einen Punkt P' so, dass

$$\frac{Q'P'}{P'Q'_1} = \frac{2c - \cos\chi_1}{2c + \cos\chi_1}$$

ist. Dies giebt in unserem Beispiele

$$\frac{Q'P'}{P'Q'_1} = \frac{1{,}1888 - 0{,}7760}{1{,}1888 + 0{,}7760} = 0{,}2101.$$

Der so erhaltene Punkt P' stellt auf der Karte den Punkt P des ersten Meridianes dar, für welchen $\chi = 40^0$, also die geographische Breite 50^0 ist und um welchen herum die Vergrösserung sich am wenigsten ändert.

Nunmehr gilt es, die in den Formeln (9) bis (12) vorkommende Grösse

$$\alpha = \tan^{2c}\frac{\zeta_0}{2},$$

oder unter Annahme der Erde als einer Kugel

$$a = \tan^{2c}\frac{\chi_0}{2}$$

zu berechnen. Zufolge (17) ist aber

$$\tan^{2c}\frac{\chi_0}{2} = \frac{2c + \cos\chi_1}{2c - \cos\chi_1}\cdot\tan^{2c}\frac{\chi_1}{2},$$

also in unserem Falle

$$a = 1{,}4307,$$

und für die Poldistanz desjenigen Parallelkreises, der die Entfernung $Q'Q'_1$ der Karte gerade halbirt, ergiebt sich $\chi_0 = 107^\circ\, 0'\, 30''$, d. h. die Mitte von $Q'Q'_1$ entspricht der südlichen Breite von 17°.

Bei dieser Darstellung entspricht dem Winkel λ zwischen zwei Meridianen auf der Kugel ein Winkel $= 1{,}1888 \cdot \lambda$, unter welchem sich die entsprechenden Kreise in den Polen Q' und Q'_1 auf der Karte schneiden.

Die weitere Konstruktion erfolgt nach Anleitung der Nummern 7 und 8.

13. Wenn man den Punkt nicht bestimmt, um welchen herum die Aenderung von $\varkappa$ am kleinsten sein soll, so kann man den Koefficienten c willkürlich annehmen.

Setzt man $c = \frac{1}{2}$, so schneiden sich die Meridiane in den beiden Polen Q' und Q'_1 unter denselben Winkeln, wie auf der Kugel oder dem Sphäroide, also genau so, wie dies bei der schon früher von uns behandelten stereographischen Projektion der Fall ist, während sonst im Allgemeinen bei der Lagrange'schen Projektion die Winkel am Pole das $2c$-fache der Längendifferenzen sind.

Es lässt sich nun auch zeigen, dass in der That die stereographische Projektion nur ein specieller Fall der Lagrange'schen für $c = \frac{1}{2}$ ist.

Die Konstruktion der Meridiane stimmt, wie bereits angedeutet, bei beiden Konstruktionen völlig überein.

Was ferner den zwischen den Polen liegenden Schnittpunkt eines Parallelkreises mit der x-Achse anlangt, so ist bei der Lagrange'schen Projektion für $c = \frac{1}{2}$ zufolge Formel (12) und (13)

$$x' = \frac{2d}{\tan\frac{\chi_0}{2}\cot\frac{\chi}{2} + 1},$$

wenn man die Erde als Kugel ansieht. Nimmt man nun in Uebereinstimmung mit Nr. 19 des §. 9 (S. 67) an, dass der Punkt dessen Projektion gerade mitten zwischen die Pole fällt, die Breite $-\alpha$ hat, setzt also $\chi_0 = 90^\circ + \alpha$ und ferner $\chi = 90^\circ - \varphi$, so geht der vorstehende Werth von x' über in

$$x' = \frac{2d\sin\frac{90^\circ - \varphi}{2}\sin\frac{90^\circ - \alpha}{2}}{\cos\frac{\varphi - \alpha}{2}}.$$

Nennt man aber diesen Punkt der Karte D', so ist auf S. 66 die Formel angegeben

$$AD' = 2a \tan \frac{\varphi - \alpha}{2},$$

während sich weiter oben auf derselben Seite findet

$$AQ' = 2a \tan \frac{90^0 - \alpha}{2}.$$

Daraus folgt aber

$$Q'D' = 2a\left(\tan \frac{90^0 - \alpha}{2} - \tan \frac{\varphi - \alpha}{2}\right)$$

oder

$$Q'D' = \frac{2a \sin \frac{90^0 - \varphi}{2}}{\cos \frac{90^0 - \alpha}{2} \cos \frac{\varphi - \alpha}{2}},$$

was mit dem Werthe von x' am Ende der vorigen Seite übereinstimmt, wenn man

$$d = a \cot \tfrac{1}{2}(90^0 - \alpha)$$

setzt. Da nun der Parallelkreis sowohl bei der Lagrange'schen, als auch bei der stereographischen Projektion die Entfernung beider Pole harmonisch theilt, so stimmt auch die Konstruktion der Parallelkreise bei beiden überein, beide sind also identisch.

14. Wenn man $c = \frac{1}{2}$ setzt, so sind die Winkel an den Polen gleich $\frac{1}{2}\lambda$, also höchstens $\pm$ 90°. Man kann also die ganze Erdkugel in Form eines Kreises darstellen. Nimmt man noch $\chi_0 = 90^0$, nimmt man also an, dass der Aequator die Entfernung der beiden Pole auf der Karte halbirt, so wird, unter Voraussetzung einer Kugel, zufolge (12) und (13)

$$x' = \frac{2d}{\cot^{\frac{1}{2}} \frac{90^0 - \varphi}{2} + 1}, \quad x'' = \frac{-2d}{\cot^{\frac{1}{2}} \frac{90^0 - \varphi}{2} - 1}.$$

Rechnet man aber die Entfernungen vom Halbirungspunkte der Strecke $2d$ an, d. h. von dem Schnittpunkte des ersten Meridianes und des Aequators, setzt also $\xi' = d - x'$ und $\xi'' = d - x''$, so findet man

$$\xi' = d\,\frac{\sqrt{\sin\frac{90^0+\varphi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{90^0-\varphi}{2}}}{\sqrt{\sin\frac{90^0+\varphi}{2}} + \sqrt{\sin\frac{90^0-\varphi}{2}}}$$

$$\xi'' = d\,\frac{\sqrt{\sin\frac{90^0+\varphi}{2}} + \sqrt{\sin\frac{90^0-\varphi}{2}}}{\sqrt{\sin\frac{90^0+\varphi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{90^0-\varphi}{2}}}.$$

Man bemerkt sofort, dass für negative φ die beiden Grössen ξ' und ξ'' einfach ihr Vorzeichen umkehren; man hat also nur

nöthig die Werthe von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^0$ zu berechnen. Hat man ξ' und ξ'', so lässt sich der Parallelkreis von der Breite φ sofort konstruiren; natürlich gehört zur Karte nur der Theil desselben, der innerhalb des Kreises liegt, welchen man über dem Durchmesser $2d$ beschrieben hat.

Die Konstruktion der Meridiane hat nach Anleitung von Nr. 7 keinerlei Schwierigkeit.

Die folgende Tabelle enthält die Werthe von ξ' und ξ'' für verschiedene Breiten von 10 zu 10^0 unter der Voraussetzung $d = 1$.

φ	ξ'	ξ''	φ	ξ'	ξ''
0^0	0.0000	∞	50^0	0.2475	4.0411
10	0.0438	22.8155	60	0.3178	3.1463
20	0.0889	11.2511	70	0.4086	2.4476
30	0.1365	7.3271	80	0.5435	1.8401
40	0.1884	5.3067	90	1.0000	1.0000.

Auf Grund dieser Tabelle ist auf **Taf. V** die **Fig. XXIX** konstruirt, welche uns ein Bild der nördlichen Erdhälfte giebt.

15. Da man über die Grösse d frei verfügen kann, so kann man auch

$$2d = a \tan^{2c} \frac{\zeta_0}{2}$$

setzen. Setzt man diesen Werth in die Formeln (12) ein, so erhält man

$$x' = \frac{a}{\cot^{2c} \frac{\zeta}{2} + \cot^{2c} \frac{\zeta_0}{2}}, \quad x'' = \frac{-a}{\cot^{2c} \frac{\zeta}{2} - \cot^{2c} \frac{\zeta_0}{2}}.$$

Nimmt man nun hier $\zeta_0 = 180^0$, also $d = \infty$, so wird

$$x' = -x'' = a \cot^{2c} \frac{\zeta}{2},$$

d. h. die Parallelkreise erscheinen als Bogen koncentrischer, um den einen Pol beschriebener Kreise vom Halbmesser

$$r = a \cot^{2c} \frac{\zeta}{2},$$

und die Meridiane sind gerade Linien, die sich unter den Winkeln $2c\lambda$ im Pole schneiden. Denn da sie nach dem andern, unendlich entfernten Pol der Karte gehen, so sind ihre Halbmesser nothwendig unendlich gross, sie müssen also Gerade sein.

Wir erkennen so, dass die Lagrange'sche Projektion auch die im vorigen Paragraphen besprochene Lambert'sche als speciellen Fall umfasst, denn die vorstehende Formel für r unterscheidet sich von Formel (2) des §. 22 nur dadurch, dass in ihr a und $2c$ steht, wo dort C und μ gesetzt ist.

Für $c = \frac{1}{2}$ geht übrigens diese Projektion in die stereographische Polarprojektion über.

16. Die vorstehend besprochene Darstellungsweise, welche, wie wir gezeigt haben, sowohl die stereographische als die Lambert-Gaussische konforme Projektion als specielle Fälle mit umfasst, ist von dem französischen Mathematiker Jos. Louis Lagrange (1736 — 1813) in zwei, in den *Nouveaux Mémoires de l'Acad. royale des sciences de Berlin, Année MDCCLXXIV* (Berlin 1781), S. 161 bis 210 abgedruckten Abhandlungen *Sur la construction des cartes géographiques* angegeben worden und wird deshalb nach ihm benannt. Indessen ist dieselbe Projektion auch schon früher von Lambert in seiner schon mehrfach citirten „Entwerfung der Carten etc.", die 1772 erschien, betrachtet worden.

Der einfache Gedankengang, durch welchen Lambert auf die wesentlichen Formeln dieser Darstellungsart geführt wird, mag noch in der Schlussnummer dieses Paragraphen Platz finden.

17. Es sei die Aufgabe gestellt, ein Netz für konforme Abbildung zu entwerfen, so dass Meridiane und Parallelkreise durch Kreislinien dargestellt werden, und zwar sollen sich die Abbildungen zweier Meridiane von dem Längenunterschiede λ in den beiden Polen auf der Karte unter dem Winkel $\mu\lambda$ schneiden.

Die letztere Bedingung führt sofort auf die in Nr. 7 dieses Paragraphen gegebene Konstruktion der Meridiane, was einer weitern Ausführung nicht bedarf.

Was die Parallelkreise anlangt, so müssen ihre Mittelpunkte auf der Verlängerung der Geraden liegen, welche die beiden Pole Q' und Q'_1 der Karte verbindet, oder, was dasselbe ist, auf dem ersten Meridiane. Denn legt man von einem Punkte M auf der Verlängerung von $Q'_1 Q'$ aus eine Tangente MT an einen der Meridiane, so ist

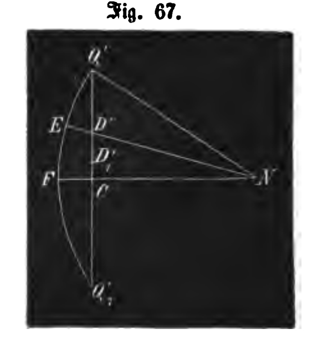
$$MT^2 = MQ' \cdot MQ'_1;$$

es sind also alle von M aus an die verschiedenen Meridiane zu legenden Tangenten gleich lang und der um M mit dem Halbmesser MT beschriebene Kreis schneidet sämmtliche Meridiane rechtwinklig, wie es sein muss.

Uebrigens drückt die vorstehende Gleichung zugleich aus, dass der Durchmesser des Parallelkreises in Q' und Q'_1 harmonisch getheilt wird.

Dadurch allein ist aber der Parallelkreis von einer bestimmten Breite φ noch nicht hinlänglich bestimmt; er ist es aber, wenn man die Lage des zwischen Q' und Q'_1 liegenden Punktes D' kommt, in welchem dieser Kreis die Gerade $Q'Q'_1$ schneidet.

Fig. 67.



Gesetzt nun es sei in Fig. 67 die Strecke $Q'Q'_1 = 2$, C der Mittelpunkt derselben, $Q'FQ'_1$ der Meridian der Karte, welcher der verschwindend kleinen Länge $d\lambda$ entspricht, der also in Q' und Q'_1 mit $Q'Q'_1$ den Winkel $\mu d\lambda$ einschliesst, ferner N der Mittelpunkt dieses Kreises, dann ist, wenn F den Bogen $Q'Q'_1$ halbirt,

$$CF = Q'C \tan (\text{Bog. } Q'F) = \tfrac{1}{2}\, \mu d\lambda$$

und

$$NC = \cot (\mu d\lambda) = \frac{1}{\mu d\lambda},$$

also

$$NF = NQ' = \tfrac{1}{2}\, \mu d\lambda + \frac{1}{\mu d\lambda}.$$

Setzen wir nun $CD' = \xi$, so ist

$$ND' = \sqrt{\frac{1}{\mu^2 d\lambda^2} + \xi^2} = \frac{1}{\mu d\lambda} \sqrt{1 + \xi^2 \mu^2 d\lambda^2}$$

wofür man, weil $\xi \mu d\lambda$ eine verschwindend kleine Grösse ist, auch setzen kann

$$ND' = \frac{1}{\mu d\lambda} + \tfrac{1}{2}\, \xi^2 \mu d\lambda.$$

Ist nun $D'E$ ein Bogenelement des durch D' gehenden Parallelkreises, so findet man

$$D'E = NF - ND' = \tfrac{1}{2}\, \mu d\lambda\, (1 - \xi^2).$$

Bedeutet nun D'_1 den Punkt, in welchem der Parallelkreis vom Polabstande $\chi + d\chi$ (der Breite $\varphi - d\varphi$) die Linie $Q'Q'_1$ schneidet, so muss nach dem Grundsatze der Konformität

$$\frac{D'E}{D'D'_1}$$

gleich sein dem Verhältnisse zwischen dem Parallelkreiselement und dem Meridianelement auf der Kugel oder auf dem Sphäroide. Beschränken wir uns hier auf erstere, so ist dieses Verhältniss gleich

$$\frac{\sin \chi d\lambda}{d\chi},$$

wenn man den Radius der Kugel als Einheit annimmt. Dies giebt die Gleichung

$$-\tfrac{1}{2}\, \frac{\mu d\lambda\, (1 - \xi^2)}{d\xi} = \frac{\sin \chi d\lambda}{d\chi}$$

oder

$$\frac{\mu d\chi}{\sin \chi} = -\frac{2 d\xi}{1 - \xi^2}.$$

Die Integration dieser Gleichung giebt uns

$$\mu l C \tan \frac{\chi}{2} = l\, \frac{1 - \xi}{1 + \xi},$$

wo l den natürlichen Logarithmus und C die Integrationskonstante bedeutet. Man kann diese Gleichung auch in der Form

$$\xi = \frac{1 - C^{\mu} \tan^{\mu} \frac{\chi}{2}}{1 + C^{\mu} \tan^{\mu} \frac{\chi}{2}}$$

schreiben; es folgt daraus für $Q'D' = 1 - \xi$ der Werth

$$Q'D' = \frac{2\,C^{\mu} \tan^{\mu} \frac{\chi}{2}}{1 + C^{\mu} \tan^{\mu} \frac{\chi}{2}}.$$

Nimmt man an, dass für einen bestimmten Werth χ_0 von χ der Punkt D' gerade in die Mitte von $Q'Q'_1$ fällt, also $Q'D' = 1$ wird, so erhält man als Bestimmung der Konstanten C die Gleichung

$$C^{\mu} = \cot^{\mu} \frac{\chi_0}{2}$$

und statt der vorigen Gleichung kann man nun schreiben

$$Q'D' = \frac{2}{\tan^{\mu} \frac{\chi_0}{2} \cot^{\mu} \frac{\chi}{2} + 1}.$$

Setzt man die Entfernung $Q'Q'_1$ nicht gleich 2, sondern allgemein gleich $2d$, so hat man die rechte Seite der vorstehenden Formel noch mit d zu multipliciren und erhält dann eine mit der ersten Gleichung (12) übereinstimmende Formel.

Wie man aus der einen Formel die übrigen entwickelt, bedarf nach dem Früheren keiner weitern Auseinandersetzung.

Sechstes Kapitel.

Die zenithalen Abbildungen und verschiedene konventionelle Darstellungsweisen.

§. 24.

Die zenithalen Abbildungen.

I. Allgemeines

1. Eine Abbildung heisst zenithal, wenn alle Punkte P, die auf der Erdkugel gleichweit von einem gewissen Centralpunkte A abstehen, auch auf der Karte auf dem Umfange eines Kreises liegen, dessen Centrum die Projektion A' jenes Punktes A ist, und wenn alle durch A gehende grössten Kreise durch Gerade dargestellt werden, die sich in A' unter denselben Winkeln schneiden, wie die grössten Kreise in A.

Zur Erläuterung erinnern wir an die perspektivische Darstellung der Erdoberfläche auf die Ebene des Aequators oder eine ihr parallele. Wie in diesem Falle, so wird bei jeder zenithalen Darstellung, wenn man unter A einen Pol versteht, das Netz aus einem Systeme koncentrischer Kreise um A', die Parallelkreise darstellend, und aus den unter gleichen Winkeln sich schneidenden Durchmessern bestehen, welche letzteren die Meridiane repräsentiren.

2. Wenn der Punkt A nicht ein Pol ist, also auch der Mittelpunkt A' der Karte nicht mit einem Pole zusammenfällt, so kann man die Karte doch nach den im Vorstehenden angegebenen Grundsätzen konstruiren.

Zu dem Ende legt man durch A den Meridian, welchen man als den ersten bezeichnet und von welchem aus man die Längen zählt. Ist dann P ein beliebiger Punkt, so lege man durch P und den Pol Q den Meridian und endlich noch durch A und P einen

grössten Kreis. Bedeutet dann α die geographische Breite von A, φ diejenige von P und λ die Länge von P, so ist in dem sphärischen Dreiecke AQP

$$AQ = 90^0 - \alpha, \quad PQ = 90^0 - \varphi, \quad \angle Q = \lambda,$$

und wenn man den Bogen AP mit μ bezeichnet, so hat man zur Berechnung von μ die Gleichung

$$(1) \qquad \cos\mu = \sin\alpha \sin\varphi + \cos\alpha \cos\varphi \cos\lambda.$$

Wird ferner der Winkel A mit ν bezeichnet, so ist

$$(2) \qquad \sin\nu = \frac{\sin\lambda \cos\varphi}{\sin\mu}.$$

Handelt es sich nun um die Darstellung eines Meridianes, so berechnet man die Werthe von μ und ν, welche den verschiedenen Werthen von φ (etwa von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Grad) und der konstanten Länge λ entsprechen. Dann zieht man durch das Centrum A' der Karte, die Abbildung von A, eine Gerade, die den ersten Meridian darstellt, worauf man die verschiedenen Werthe von ν an diese Gerade abträgt. Auf den zweiten Schenkeln dieser Winkel trägt man alsdann von A' aus die Entfernungen ab, welche dem noch näher zu bestimmenden Gesetze der Kartenprojektion gemäss zu den verschiedenen Werthen von μ gehören. Verbindet man die so erhaltenen Punkte der Karte, so giebt dies die Projektion des Meridianes von der Länge λ.

In ähnlicher Weise kann man den Parallelkreis von der Breite φ projiciren, indem man zuerst die den verschiedenen Werthen von λ, etwa von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Grad fortschreitend, entsprechenden Werthe von μ und ν berechnet und dann die zugehörigen Punkte nach dem vorstehend beschriebenen Verfahren konstruirt.

Man kann übrigens die Karte auch auf die Weise erhalten, dass man zuerst provisorisch ein anderes, bequemer zu zeichnendes zenithales Kartennetz mit dem gleichen Mittelpunkte, am passendsten eine stereographische Abbildung anfertigt; dann vom Centrum der Karte aus Gerade nach den verschiedenen Punkten des Netzes zieht und auf jeder solchen Gerade die zu dem betreffenden Netzpunkte gehörige Entfernung, wie sie sich auf Grund der zu Grunde liegenden Regel ergiebt, abträgt. Die so gefundenen Kartenpunkte treten dann an die Stelle der provisorischen.

3. Wenn der Punkt A auf dem Aequator liegt, so gehen die Formeln (1) und (2) in die folgenden, einfacheren über:

$$(3) \qquad \cos\mu = \cos\varphi \cos\lambda,$$

$$(4) \qquad \tan\nu = \sin\lambda \cot\varphi.$$

Zur rascheren Ermittelung von μ und ν können die folgenden von Lambert berechneten Tabellen dienen.

Tafeln zur Umwandlung der geographischen Koordinaten φ und λ in zenithale.

1. Werthe von μ, berechnet aus der Formel

$$\cos \mu = \cos \varphi \cos \lambda.$$

λ	φ 0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0°	0° 0′	5° 0′	10° 0′	15° 0′	20° 0′	25° 0′	30° 0′	35° 0′	40° 0′	45° 0′	50° 0′	55° 0′	60° 0′	65° 0′	70° 0′	75° 0′	80° 0′	85° 0′	90° 0′
5	5 0	7 4	11 10	15 48	20 35	25 28	30 23	35 19	40 16	45 13	50 11	55 9	60 8	65 6	70 5	75 3	80 2	85 1	90 0
10	10 0	11 10	14 6	17 58	22 16	26 48	31 29	36 13	41 2	45 44	50 44	55 36	60 30	65 24	70 19	75 14	80 9	85 5	90 0
15	15 0	15 48	17 58	21 6	24 49	28 45	33 14	37 42	42 16	46 55	51 37	56 21	61 7	65 55	70 43	75 31	80 21	85 10	90 0
20	20 0	20 35	22 16	24 49	27 59	31 37	35 32	39 40	43 57	48 22	52 50	57 53	61 58	66 36	71 15	75 55	80 37	85 18	90 0
25	25 0	25 28	26 48	28 54	31 37	34 47	38 20	42 4	46 2	50 2	54 22	58 41	63 3	67 26	71 57	76 26	80 57	85 29	90 0
30	30 0	30 23	31 29	33 14	35 32	38 20	41 25	44 49	48 26	52 14	56 10	60 13	64 20	68 32	72 46	77 3	81 21	85 40	90 0
35	35 0	35 19	36 13	37 42	39 40	42 4	44 49	47 51	51 8	54 36	58 13	61 58	65 46	69 45	73 44	77 46	81 49	85 54	90 0
40	40 0	40 16	41 2	42 16	43 57	46 2	48 26	51 8	54 4	57 12	60 30	63 56	67 29	71 7	74 49	78 31	82 21	86 10	90 0
45	45 0	45 13	45 44	46 55	48 22	50 2	52 14	54 36	57 12	60 0	62 58	66 4	69 18	72 37	76 0	79 27	82 57	86 28	90 0
50	50 0	50 11	50 44	51 37	52 50	54 22	56 10	58 13	60 30	62 58	65 36	68 22	71 15	74 14	77 18	80 25	83 35	86 47	90 0
55	55 0	55 9	55 36	56 21	57 23	58 41	60 13	61 58	63 56	66 4	68 22	70 48	73 20	75 58	78 41	81 28	84 17	87 8	90 0
60	60 0	60 8	60 30	61 7	61 58	63 3	64 20	65 46	67 29	69 18	71 15	73 20	75 31	77 48	80 9	82 34	85 1	87 30	90 0
65	65 0	65 6	65 24	65 55	66 36	67 29	68 32	69 45	71 7	72 37	74 14	75 58	77 48	79 43	81 41	83 45	85 47	87 53	90 0
70	70 0	70 5	70 19	70 43	71 15	71 57	72 46	73 44	74 49	77 0	77 18	78 41	80 9	81 41	83 17	84 55	86 36	88 17	90 0
75	75 0	75 3	75 14	75 31	75 55	76 26	77 3	77 46	78 34	79 27	80 25	81 28	82 34	83 45	84 55	86 10	87 26	88 42	90 0
80	80 0	80 2	80 9	80 21	80 37	80 57	81 21	81 49	82 21	82 57	83 35	84 17	85 1	85 47	86 36	87 26	88 16	89 8	90 0
85	85 0	85 2	85 5	85 10	85 18	85 29	85 40	85 56	86 10	86 28	86 47	87 8	87 30	87 53	88 17	88 42	89 8	89 34	90 0
90	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0

2. Werthe von ν, berechnet aus der Formel $\tan \nu = \sin \lambda \cot \varphi$.

λ	φ = 0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0°	—	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′
5	90° 0′	46 53	26 18	18 1	13 28	10 35	8 35	7 6	5 56	4 59	4 11	3 30	2 53	2 13	1 49	1 20	0 53	0 25	0 0
10	90 0	63 16	44 34	32 57	25 30	20 25	16 44	13 56	11 42	9 51	8 17	6 56	5 44	4 38	4 2	2 40	1 45	0 52	0 0
15	90 0	71 20	55 44	44 0	35 25	29 2	24 9	20 17	17 14	14 31	12 15	10 16	8 30	6 53	5 23	3 58	2 37	1 18	0 0
20	90 0	75 39	62 44	51 55	43 13	36 15	30 39	26 2	22 11	18 53	16 1	13 28	11 10	9 4	7 6	5 14	3 29	1 43	0 0
25	90 0	79 4	67 21	57 38	49 16	42 11	36 12	31 7	26 44	22 55	19 31	16 29	13 43	11 9	8 45	6 28	4 16	2 5	0 0
30	90 0	80 6	70 34	61 49	53 57	47 0	40 51	35 32	30 47	26 34	22 46	19 18	16 6	13 7	10 19	7 38	5 7	2 30	0 0
35	90 0	81 20	72 54	64 58	57 36	50 53	44 49	39 19	34 21	29 50	25 42	21 53	18 19	14 58	11 48	8 44	5 46	2 52	0 0
40	90 0	82 15	74 40	67 22	60 29	54 2	48 4	42 33	37 27	32 44	28 21	24 14	20 22	16 21	13 10	9 46	6 28	3 13	0 0
45	90 0	82 57	76 0	69 15	62 46	56 36	50 46	45 17	40 7	35 16	30 41	26 21	22 12	18 15	14 26	10 44	7 7	3 32	0 0
50	90 0	83 29	77 2	70 43	64 35	58 40	53 0	47 35	42 24	37 27	32 44	28 12	23 51	19 39	15 35	11 36	7 42	3 50	0 0
55	90 0	83 54	77 51	71 53	66 2	60 21	54 49	49 28	44 19	39 19	34 30	29 50	25 19	20 54	16 15	12 23	8 13	4 6	0 0
60	90 0	84 14	78 29	72 48	67 12	61 42	56 18	51 3	45 54	40 54	36 0	31 14	26 34	21 59	17 30	13 4	8 41	4 20	0 0
65	90 0	84 29	78 59	73 32	68 7	62 47	57 30	52 19	47 12	42 11	37 15	32 24	27 37	22 55	18 15	13 39	9 5	4 32	0 0
70	90 0	84 41	79 22	74 5	68 50	63 36	58 26	53 19	48 14	43 13	38 15	33 21	28 29	23 40	18 53	14 8	9 24	4 42	0 0
75	90 0	84 49	79 39	74 29	69 21	64 14	59 8	54 4	49 13	44 0	39 1	34 4	29 9	24 15	19 22	14 31	9 40	4 50	0 0
80	90 0	85 55	79 51	74 47	69 43	64 40	59 37	54 35	49 34	44 34	39 34	34 35	29 37	24 40	19 43	14 47	9 51	4 55	0 0
85	90 0	85 59	79 58	74 56	69 56	64 55	59 54	54 54	49 54	44 53	39 54	34 54	29 54	24 55	19 56	14 57	9 58	4 59	0 0
90	90 0	85 0	80 0	75 0	70 0	65 0	60 0	55 0	50 0	45 0	40 0	35 0	30 0	25 0	20 0	15 0	10 0	5 0	0 0

Tafeln zur Umwandlung der geographischen Koordinaten φ und λ in zenithale.

1. Werthe von μ, berechnet aus der Formel

$$\cos \mu = \cos \varphi \cos \lambda.$$

λ	φ 0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0°	0° 0′	5° 0′	10° 0′	15° 0′	20° 0′	25° 0′	30° 0′	35° 0′	40° 0′	45° 0′	50° 0′	55° 0′	60° 0′	65° 0′	70° 0′	75° 0′	80° 0′	85° 0′	90° 0′
5	5 0	7 4	11 10	15 48	20 35	25 28	30 23	35 19	40 16	45 13	50 11	55 9	60 8	65 6	70 5	75 3	80 2	85 1	90 0
10	10 0	11 10	14 6	17 58	22 16	26 48	31 29	36 13	41 2	45 44	50 44	55 36	60 30	65 24	70 19	75 14	80 9	85 5	90 0
15	15 0	15 48	17 58	21 6	24 49	28 45	33 14	37 42	42 16	46 55	51 37	56 21	61 7	65 55	70 43	75 31	80 21	85 10	90 0
20	20 0	20 35	22 16	24 49	27 59	31 37	35 32	39 40	43 57	48 22	52 50	57 53	61 58	66 36	71 15	75 55	80 37	85 18	90 0
25	25 0	25 28	26 48	28 54	31 37	34 47	38 20	42 4	46 2	50 2	54 22	58 41	63 3	67 26	71 57	76 26	80 57	85 29	90 0
30	30 0	30 23	31 29	33 14	35 32	38 20	41 25	44 49	48 26	52 14	56 10	60 13	64 20	68 32	72 46	77 3	81 21	85 40	90 0
35	35 0	35 19	36 13	37 42	39 40	42 4	44 49	47 51	51 8	54 36	58 13	61 58	65 46	69 45	73 44	77 46	81 49	85 54	90 0
40	40 0	40 16	41 2	42 16	43 57	46 2	48 26	51 8	54 4	57 12	60 30	63 56	67 29	71 7	74 49	78 34	82 21	86 10	90 0
45	45 0	45 13	45 44	46 55	48 22	50 2	52 14	54 36	57 12	60 0	62 58	66 4	69 18	72 37	76 0	79 27	82 57	86 28	90 0
50	50 0	50 11	50 44	51 37	52 50	54 22	56 10	58 13	60 30	62 58	65 36	68 22	71 15	74 14	77 18	80 25	83 35	86 47	90 0
55	55 0	55 9	55 36	56 21	57 23	58 41	60 13	61 58	63 56	66 4	68 22	70 48	73 20	75 58	78 41	81 28	84 17	87 8	90 0
60	60 0	60 8	60 30	61 7	61 58	63 3	64 20	65 46	67 29	69 18	71 15	73 20	75 31	77 48	80 9	82 34	85 1	87 30	90 0
65	65 0	65 6	65 24	65 55	66 36	67 29	68 32	69 45	71 7	72 37	74 14	75 58	77 48	79 43	81 41	83 45	85 47	87 53	90 0
70	70 0	70 5	70 19	70 43	71 15	71 57	72 46	73 44	74 49	77 0	77 18	78 41	80 9	81 41	83 17	84 55	86 36	88 17	90 0
75	75 0	75 3	75 14	75 31	75 55	76 26	77 3	77 46	78 34	79 27	80 25	81 28	82 34	83 45	84 55	86 10	87 26	88 42	90 0
80	80 0	80 2	80 9	80 21	80 37	80 57	81 21	81 49	82 21	82 57	83 35	84 17	85 1	85 47	86 36	87 26	88 16	89 8	90 0
85	85 0	85 2	85 5	85 10	85 18	85 29	85 40	85 56	86 10	86 28	86 47	87 8	87 30	87 53	88 17	88 42	89 8	89 34	90 0
90	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0	90 0

2. Werthe von ν, berechnet aus der Formel
$\tan \nu = \sin \lambda \cot \varphi$.

λ	φ																		
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0°	—	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′	0° 0′
5	90° 0′	46 53	26 18	18 1	13 28	10 35	8 35	7 6	5 56	4 59	4 11	3 30	2 53	2 13	1 49	1 20	0 53	0 25	0 0
10	90 0	63 16	44 34	32 57	25 30	20 25	16 44	13 56	11 42	9 51	8 17	6 56	5 44	4 38	4 2	2 40	1 45	0 52	0 0
15	90 0	71 20	55 44	44 0	35 25	29 2	24 9	20 17	17 14	14 31	12 15	10 16	8 30	6 53	5 23	3 58	2 37	1 18	0 0
20	90 0	75 39	62 44	51 55	43 13	36 15	30 39	26 2	22 11	18 53	16 1	13 28	11 10	9 4	7 6	5 14	3 29	1 43	0 0
25	90 0	79 4	67 21	57 38	49 16	42 11	36 12	31 7	26 44	22 55	19 31	16 29	13 43	11 9	8 45	6 28	4 16	2 5	0 0
30	90 0	80 6	70 34	61 49	53 57	47 0	40 51	35 32	30 47	26 34	22 46	19 18	16 6	13 7	10 19	7 38	5 7	2 30	0 0
35	90 0	81 20	72 54	64 58	57 36	50 53	44 49	39 19	34 21	29 50	25 42	21 53	18 19	14 58	11 48	8 44	5 46	2 52	0 0
40	90 0	82 15	74 40	67 22	60 29	54 2	48 4	42 33	37 27	32 44	28 21	24 14	20 22	16 21	13 10	9 46	6 28	3 13	0 0
45	90 0	82 57	76 0	69 15	62 46	56 36	50 46	45 17	40 7	35 16	30 41	26 21	22 12	18 15	14 26	10 44	7 7	3 32	0 0
50	90 0	83 29	77 2	70 43	64 35	58 40	53 0	47 35	42 24	37 27	32 44	28 12	23 51	19 39	15 35	11 36	7 42	3 50	0 0
55	90 0	83 54	77 51	71 53	66 2	60 21	54 49	49 28	44 19	39 19	34 30	29 50	25 19	20 54	16 15	12 23	8 13	4 6	0 0
60	90 0	84 14	78 29	72 48	67 12	61 42	56 18	51 3	45 54	40 54	36 0	31 14	26 34	21 59	17 30	13 4	8 41	4 20	0 0
65	90 0	84 29	78 59	73 32	68 7	62 47	57 30	52 19	47 12	42 11	37 15	32 24	27 37	22 55	18 15	13 39	9 5	4 32	0 0
70	90 0	84 41	79 22	74 5	68 50	63 36	58 26	53 19	48 14	43 13	38 15	33 21	28 29	23 40	18 53	14 8	9 24	4 42	0 0
75	90 0	84 49	79 39	74 29	69 21	64 14	59 8	54 4	49 13	44 0	39 1	34 4	29 9	24 15	19 22	14 31	9 40	4 50	0 0
80	90 0	85 55	79 51	74 47	69 43	64 40	59 37	54 35	49 34	44 34	39 34	34 35	29 37	24 40	19 43	14 47	9 51	4 55	0 0
85	90 0	85 59	79 58	74 56	69 56	64 55	59 54	54 54	49 54	44 53	39 54	34 54	29 54	24 55	19 56	14 57	9 58	4 59	0 0
90	90 0	85 0	80 0	75 0	70 0	65 0	60 0	55 0	50 0	45 0	40 0	35 0	30 0	25 0	20 0	15 0	10 0	5 0	0 0

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wenden wir uns zur näheren Betrachtung einiger besonderen zenithalen Darstellungen.

II. Die äquidistante zenithale Projektion.

4. Bei dieser Projektion ist der Abstand eines Punktes der Karte vom Mittelpunkte der letzteren gleich dem sphärischen Abstand des Punktes auf der Kugel von dem als Centrum angenommenen Punkte, oder, wenn wir den Abstand auf der Karte mit r bezeichnen

$$r = a\mu, \tag{5}$$

wo a den Kugelhalbmesser bedeutet.

5. Die Linearvergrösserung lässt sich hiernach leicht berechnen.

Zunächst ist klar, dass in Richtung von r keine Linearvergrösserung stattfindet, dass daher nach der auf S. 58 angenommenen Bezeichnung

$$\varkappa'' = 1$$

ist. Ist ferner O auf der Kugel der Mittelpunkt der darzustellenden Fläche, O' das Centrum der Karte, sind ferner P und M ein Paar benachbarte Punkte in der zum grössten Kreise OP senkrechten Richtung, P' und M' die entsprechenden Punkte der Karte, so ist

$$\text{auf der Kugel} \quad MP = a\,(\nu_1 - \nu)\sin\mu,$$
$$\text{auf der Karte} \quad M'P' = a\mu\,(\nu_1 - \nu),$$

mithin die Linearvergrösserung senkrecht zu r.

$$\varkappa' = \frac{M'P'}{MP} = \frac{\mu}{\sin\mu}. \tag{6}$$

Da μ im Allgemeinen grösser ist als $\sin\mu$, so ist $\varkappa'$ grösser als die Einheit, es werden also in der zu r senkrechten Richtung die Längen auf der Karte vergrössert, und zwar so, wie es folgende kleine Tafel zeigt.

μ	$\varkappa'$	μ	$\varkappa'$
0°	1.0000	50°	1.1392
10	1.0051	60	1.2092
20	1.0206	70	1.2971
30	1.0472	80	1.4178
40	1.0861	90	1.5708

Sobald man daher die Karte nicht weiter als bis auf etwa 30° vom Centrum ausdehnt, erreicht die Vergrösserung $\varkappa'$ keinen die Einheit zu weit übersteigenden Werth und es findet also über-

haupt kein wesentlicher Unterschied zwischen den Längen auf der Karte und denen auf der Kugel statt.

6. Um die Aenderung der Winkel zu erfahren, wollen wir annehmen, ψ sei der Winkel, den eine durch P gehende Richtung mit dem grössten Kreise OP einschliesst, ψ' sei der entsprechende Winkel der Karte; dann ist

$$\tan\psi = \frac{(\nu_1 - \nu)\sin\mu}{\mu_1 - \mu}$$

und

$$\tan\psi' = \frac{(\nu_1 - \nu)\,\mu}{\mu_1 - \mu},$$

mithin

$$\tan\psi' = \varkappa' \tan\psi. \tag{7}$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass im Allgemeinen auch die Aenderung der Winkel keine bedeutende Grösse erreicht, wenn man die Karte nicht zu weit ausdehnt. Für $\mu = 0$ ist $\psi' = \psi$.

Die Vergleichung der Resultate, die auf S. 87 u. folg. bei Behandlung der Gleichung

$$\tan\psi' = k\tan\psi$$

gewonnen worden sind, zeigt uns aber ferner noch, dass es durch jeden Punkt der Kugel zwei Richtungen giebt, welche mit dem grössten durch diesen Punkt und O gehenden Kreis nach entgegengesetzten Seiten den Winkeln ψ einschliessen, der durch die Gleichung

$$\tan^2\psi = \frac{1}{\varkappa'}$$

bestimmt ist, und in denen die Aenderung der Winkel $\psi' - \psi$ ihren grössten Werth erreicht. Auf der Karte ist dann

$$\tan^2\psi' = \varkappa',$$

es ist also $\psi + \psi'$ ein rechter Winkel. Die folgende Tabelle zeigt uns die Werthe von ψ und ψ' und die Maxima von $\psi' - \psi$ für verschiedene μ.

μ	ψ		ψ'		$\psi' - \psi$	
10°	44°	55.76′	45°	4.24′	0°	8.76′
20	44	42.48	45	17.52	0	35.04
30	44	20.32	45	39.68	1	19.36
40	43	49.04	46	10.96	2	21.92
50	43	8.08	46	51.92	3	43.84
60	42	17.00	47	43.00	5	26.00
70	41	17.04	48	42.96	7	25.92
80	40	1.46	49	58.54	9	57.08
90	38	35.15	51	24.85	12	49,70

Ausserdem zeigen die Erörterungen auf S. 87 u. f. auch, dass es zu jeder Richtung ψ eine konjugirte υ giebt, derart dass

$$\psi - \upsilon = \psi' - \upsilon'$$

ist, und zwar ist

$$\tan \psi \tan \upsilon = \frac{1}{\varkappa'}$$

$$\tan \psi' \tan \upsilon' = \varkappa'.$$

7. Es ist sehr leicht ein Kartennetz für Polarprojektion nach dieser Methode zu zeichnen; auf **Taf. V** zeigt uns **Fig. XXX** ein solches für eine Halbkugel.

Nach der Angabe von Germain (S. 145 seines *Traité des Projections des cartes géographiques*) ist die äquidistante Polarprojektion von dem französischen Gelehrten Guillaume Postel (geb. 1510 in Dolerin bei Avranches in der Normandie, gest. 1581 als Prof. am Collége de France in Paris) ersonnen und zuerst in Anwendung gebracht worrden.

8. Wenn man einen Punkt des Aequators als Mittelpunkt annimmt, so erscheinen Aequator und erster Meridian als gerade Linien, die einander senkrecht stehen und auf denen die Grade in richtiger Grösse angegeben sind. Die andern Meridiane, sowie auch die Parallelkreise sind transcendente Kurven.

Nimmt man endlich irgend einen andern Punkt der Kugelfläche als Mittelpunkt, so erscheint nur der durch diesen Punkt gehende Meridian auf der Karte als gerade Linie, auf welcher die Grade in natürlicher Grösse erscheinen; alle andern Meridiane, sowie auch die Parallelkreise mit dem Aequator sind transcendente Linien, über deren Konstruktion indessen nach der Angabe der Nr. 6 etwas Weiteres nicht hinzuzufügen ist.

Ein Netz für die Halbkugel in äquidistanter Meridianprojektion zeigt **Taf. V, Fig. XXXI.**

9. Ehe wir diese Projektion verlassen, mag noch die Bemerkung Platz finden, dass man dieselbe als das letzte Glied einer Reihe von Darstellungsmethoden betrachten kann, deren erste Glieder die gnomonische und die stereographische Projektion sind. Es gehören nämlich in diese Reihe alle zenithalen Projektionen, für welche

$$r = na \tan \frac{\mu}{n}$$

ist. In der That sieht man sofort, dass sich für $n = 1$ die gnomonische, für $n = 2$ die stereographische Projektion ergiebt. Nun ist weiter

$$n \tan \frac{\mu}{n} = \frac{\mu}{\cos \frac{\mu}{n}} \cdot \frac{\sin \frac{\mu}{n}}{\frac{\mu}{n}},$$

und wenn man hier n über alle Grenzen wachsen lässt, so wird

$$\frac{\mu}{\cos\frac{\mu}{n}} = \mu \text{ und } \frac{\sin\frac{\mu}{n}}{\frac{\mu}{n}} = 1,$$

es geht demnach die obige allgemeine Formel für r in die Formel

$$r = a\mu$$

über, welche die äquidistante Projektion charakterisirt.

III. Lamberts äquivalente zenithale Projektion.

10. Wir haben diese Projektion schon mehrmals erwähnt. Dieselbe ist nämlich identisch mit der S. 151 u. folg. erwähnten Kegelprojektion, wenn man $m = 1$ setzt, in welchem Falle freilich, wie schon dort erwähnt, von eigentlicher Kegelprojektion nicht mehr die Rede ist. Später haben wir diese Darstellungsweise wieder auf S. 187 bei den äquivalenten Projektionen unter dem Namen „isomere isosphärische“ Projektion (nach Germain) mit aufgeführt.

Sie ist charakterisirt durch die Gleichung

$$r = 2a \sin \tfrac{1}{2}\mu, \tag{8}$$

welche ausdrückt, dass die Projektion eines Punktes eben so weit vom Mittelpunkte der Karte entfernt ist, wie der Punkt selbst in gerader Linie vom Centrum des abzubildenden Stückes der Kugel (vergl. S. 152, Nr. 27 und die Andeutungen in der Polarprojektion auf **Taf. VI, Fig. XXXII**).

11. Untersucht man die Linearveränderungen, so findet man für die Vergrösserung in Richtung von r

$$\varkappa'' = \frac{2(\sin\frac{1}{2}\mu_1 - \sin\frac{1}{2}\mu)}{\mu_1 - \mu},$$

wo $\mu_1 - \mu = 0$ zu setzen ist. Dies giebt bekanntlich

$$\varkappa'' = \cos\tfrac{1}{2}\mu. \tag{9}$$

Senkrecht zu r findet man die Linearvergrösserung

$$\varkappa' = \frac{(\nu_1 - \nu)\, 2a \sin\frac{1}{2}\mu}{a(\nu_1 - \nu)\sin\mu}$$

für $\nu_1 - \nu = 0$, d. i.

$$\varkappa' = \sec\tfrac{1}{2}\mu. \tag{10}$$

Die folgende kleine Tabelle giebt uns die Werthe von $\varkappa'$ und $\varkappa''$ für verschiedene Werthe von μ an.

μ	$\varkappa' = \sec \frac{1}{2}\mu$	$\varkappa'' = \cos \frac{1}{2}\mu$	μ	$\varkappa' = \sec \frac{1}{2}\mu$	$\varkappa'' = \cos \frac{1}{2}\mu$
0°	1.0000	1.0000	50°	1.1033	0.9063
10	1.0039	0.9962	60	1.1547	0.8660
20	1.0154	0.9848	70	1.2208	0.8192
30	1.0352	0.9659	80	1.3054	0.7660
40	1.0642	0.9397	90	1.4142	0.7071

Daraus sieht man, dass für $\mu = 30^0$ die Längen in der Richtung von r blos um ungefähr $3\frac{1}{2}$ Procent zu klein, in der darauf senkrechten Richtung dagegen um ebensoviel zu gross dargestellt sind. Man kann daher die Karte recht wohl bis in diese Gegend ausdehnen, ohne dass die Linearveränderung zu bedeutend wird.

Da $\varkappa' \cdot \varkappa'' = 1$ ist, so bleiben die Flächen ungeändert, wie wir schon wissen.

12. Was ferner die Aenderung der Winkel anlangt, so ist

$$\text{auf der Kugel} \quad \tan \psi = \frac{(\nu_1 - \nu)\, a \sin \mu}{a\,(\mu_1 - \mu)},$$

$$\text{auf der Karte} \quad \tan \psi' = \frac{(\nu_1 - \nu)\, 2a \sin \frac{1}{2}\mu}{2a\,(\sin \frac{1}{2}\mu_1 - \sin \frac{1}{2}\mu)},$$

mithin

$$\tan \psi' = \sec^2 \tfrac{1}{2}\mu \cdot \tan \psi. \tag{11}$$

Demnach ist ψ' im Allgemeinen grösser als ψ; nur für $\mu = 0$ sind beide Winkel gleich gross. Ferner erreicht $\psi' - \psi$ seinen grössten Werth, wenn

$$\tan^2 \psi = \cos^2 \tfrac{1}{2}\mu, \quad \tan^2 \psi' = \sec^2 \tfrac{1}{2}\mu \tag{12}$$

ist. Die folgende kleine Tafel zeigt uns die Werthe von ψ und ψ', für welche $\psi' - \psi$ seinen Maximalwerth annimmt, sowie diesen selbst.

μ	ψ	ψ'	$\psi' - \psi$
10°	44° 53.45′	45° 6.55′	0° 13.10′
20	44 33.68	45 26.32	0 52.64
30	44 0.42	45 59.58	1 59.16
40	43 13.15	46 46.85	3 33.70
50	42 10.17	47 49.83	5 37.66
60	40 53.60	49 6.40	8 12.80
70	39 19.36	50 40.64	11 21.28
80	37 27.22	52 32.78	15 5.56
90	35 15.86	54 44.14	19 28.28

Ferner giebt es zu jeder Richtung ψ eine konjugirte υ, so dass $\psi - \upsilon = \psi' - \upsilon'$ ist, und zwar ist

$$(13)\quad \begin{cases} \tan\psi \tan\upsilon = \cos^2 \tfrac{1}{2}\mu, \\ \tan\psi' \tan\upsilon' = \sec^2 \tfrac{1}{2}\mu. \end{cases}$$

13. Wir kommen jetzt nochmals auf die Linearvergrösserung, und zwar in einer beliebigen Richtung ψ, beziehentlich ψ' zurück.

Auf der Karte hat bei den angenommenen Bezeichnungen das Linienelement den Werth

$$\frac{2a(\sin\tfrac{1}{2}\mu_1 - \sin\tfrac{1}{2}\mu)}{\cos\psi'},$$

auf der Kugel aber ist dasselbe gleich

$$\frac{a(\mu_1 - \mu)}{\cos\psi}.$$

Dividirt man mit dem zweiten Werthe in den ersten, so erhält man für $\mu_1 - \mu = 0$ nach einigen einfachen Reduktionen die Formel für die Linearvergrösserung

$$(14)\qquad \varkappa = \sqrt{\cos^2\psi \cos^2\tfrac{1}{2}\mu + \sin^2\psi \cdot \sec^2\tfrac{1}{2}\mu}.$$

Dieser Ausdruck ist der Einheit gleich, wenn auf der Kugel

$$(15)\qquad \tan\psi = \pm\cos\tfrac{1}{2}\mu$$

oder auf der Karte

$$(16)\qquad \tan\psi' = \pm\sec\tfrac{1}{2}\mu.$$

Da durch diese Gleichungen die Richtungen charakterisirt werden, in denen die Winkeländerungen ihren Maximalwerth erreichen, so erkennt man, dass in diesen Richtungen die Längen keine Aenderungen erleiden.

14. Denkt man sich durch das Centrum O' der Karte unendlich viele Radien gezogen, die unter sich die verschwindend kleinen Winkel dv bilden und geht man von einem P auf einem dieser Radien in der durch die Gleichung (16) charakterisirten Richtung ψ' weiter bis zum nächsten Radius, den man im Punkte P_1 trifft, geht man von diesem dann wieder in der Richtung, in welcher keine Linearvergrösserung eintritt weiter, u. s. f., so bewegt man sich auf einer sogenannten isoperimetrischen Kurve (Linie ohne Linearvergrösserung).

Da für kleine Werthe von μ die Grösse $\cos\frac{1}{2}\mu$ nahezu der Einheit gleich ist, so schneidet die isoperimetrische Kurve in der Nähe des Poles die verschiedenen Radien unter Winkeln, die nahezu den gemeinsamen Werth 45° haben ($\tan 45^\circ = 1$), d. h. diese Kurve hat hier nahezu die Form einer logarithmischen Spirale, welche unter 45° gegen alle Radien geneigt ist.

Mit Benutzung des in Nr. 12 angegebenen Werthes von $\tan\psi'$ ist es aber auch leicht, eine allgemeine Gleichung für die isoperimetrische Kurve zu erlangen. Zunächst nämlich erhält man

$$\frac{(\nu_1 - \nu)\sin\frac{1}{2}\mu}{\sin\frac{1}{2}\mu_1 - \sin\frac{1}{2}\mu} = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\mu},$$

und dafür kann man, wenn man die Differenzen $\mu_1 - \mu$ und $\nu_1 - \nu$ in Null übergehen lässt, setzen

$$(17) \qquad \frac{2(\nu_1 - \nu)}{\mu_1 - \mu}\sin\tfrac{1}{2}\mu = 1.$$

Nun haben wir S. 115 bis 117 aus der Gleichung (1)

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\varphi_1 - \varphi} \cdot \cos\varphi = \tan\alpha$$

die neue Gleichung (6) S. 117

$$\lambda = l\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

wo der Buchstabe l den natürlichen Logarithmus andeutet. Setzt man aber in der erwähnten Gleichung (1)

ν und ν_1 an die Stelle von λ und λ_1,

$\frac{\mu - \pi}{2}$ „ „ „ „ φ,

$\frac{\mu_1 - \pi}{2}$ „ „ „ „ φ_1.

und 1 „ „ „ „ $\tan\alpha$,

so erhält man unsere oben stehende Gleichung (17). Aus diesen geht also diejenige Gleichung hervor, die man erhält, wenn man in Gleich. (6) der S. 117 die vorstehenden Werthe substituirt. Diese Substitution giebt uns aber die Gleichung

$$(18) \qquad \nu = l\tan\frac{\mu}{4}.$$

In dieser Gleichung wird $\nu = 0$ für $\mu = 180^0$, für kleinere Werthe von μ aber wird ν negativ. Um dies zu vermeiden, kann man die Winkel ν von einem um eine halbe Umdrehung (180^0 oder π) weiter zurückliegenden Kreise an zählen und hat dann statt (18) die folgende Gleichung

$$(19) \qquad \nu = l\tan\frac{\mu}{4} + \pi,$$

welche in Verbindung mit

$$r = 2a\sin\frac{\mu}{2}$$

den Lauf der Kurve bestimmt. Einzelne Punkte derselben sind durch folgende Angaben gegeben.

v	μ	$\frac{r}{a}$
0°	9° 54′	0.1726
45	21 40	0.3759
90	46 56	0.7964
135	98 00	1.5094
180	180 00	2.0000

15 Es ist sehr leicht, eine Polarprojektion nach dieser Darstellungtweise zu zeichnen; es ist nämlich hier

$$r = 2a \sin \frac{\chi}{2} = 2a \sin \left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right),$$

wo χ die Poldistanz, φ die Breite bedeutet.

Man kann diesen Werth von r sehr leicht als Sehne konstruiren, wie schon früher erwähnt und auf **Taf. VI** in **Fig. XXXII** angedeutet ist. Ausserdem kann man denselben auch aus den Sinustafeln entlehnen.

Diese Darstellungsweise wird nicht selten als „Lorgna'sche Projektion" bezeichnet nach dem italienischen Brigadier Antonio Maria Lorgna (geb. 1730, gest. 1796 als Gouverneur der Militärschule in Verona), der dieselbe in seinem *Principj di geografia astronomico-geometrica, Verona 1789* angewandt hat. Indessen hat schon siebzig Jahre früher Lambert die ganze Methode, nicht blos die Polarprojektion, wie Lorgna, behandelt.

Auf **Taf. VI** zeigt uns **Fig. XXXII** drei Viertel der Halbkugel in Polarprojektion.

16. Bei der Meridianprojektion, wo das Centrum auf dem Aequator liegt, erscheinen Aequator und erster Meridian als zwei auf einander senkrechte gerade Linien. Uebrigens ist

$$r = 2a \sin \frac{\mu}{2}, \quad \cos \mu = \cos \varphi \cos \lambda,$$

$$\tan v = \sin \lambda \cot \varphi$$

und es können die Werthe von $\frac{r}{a}$ für verschiedene φ und λ unmittelbar aus folgender Tafel entnommen werden.

φ	λ									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0.00000	0.17432	0.34730	0.51764	0.68404	0.84524	1.00000	1.14716	1.28588	1.41422
10	0.17432	0.24557	0.38622	0.54246	0.70085	0.85671	1.00756	1.15167	1.28763	1.41422
20	0.34730	0.38622	0.48369	0.61025	0.74854	0.88992	1.02472	1.16499	1.29369	1.41422
30	0.51764	0.54246	0.61025	0.70629	0.82047	0.94163	1.06488	1.18642	1.30355	1.41422
40	0.68404	0.70085	0.74854	0.82047	0.90904	1.00757	1.11083	1.21490	1.31680	1.41422
50	0.84524	0.85671	0.88992	0.94163	1.00757	1.08335	1.16499	1.24913	1.33295	1.41422
60	1.00000	1.00756	1.02472	1.06488	1.11083	1.16499	1.22474	1.28759	1.35142	1.41422
70	1.14716	1.15167	1.16499	1.18642	1.21490	1.24913	1.28759	1.32893	1.37159	1.41422
80	1.28588	1.28763	1.29369	1.30355	1.31680	1.33295	1.35142	1.37159	1.39273	1.41422
90	1.41422	1.41422	1.41422	1.41422	1.41422	1.41422	1.41422	1.41422	1.41422	1.41422

Eine Meridianprojektion der Halbkugel zeigt uns auf **Taf. VI** die **Fig. XXXIII.**

17. Wenn ein beliebiger anderer Punkt als Mittelpunkt genommen wird, so ist die Zeichnung der Meridiane und Parallelkreise mit mehr Umständlichkeit verbunden, ohne dass indessen dem in Nr. 6 dieses Paragraphen Gesagten etwas Neues hinzuzufügen wäre.

18. Diese Lambert'sche Projektion hat vor andern äquivalenten und zenithalen mancherlei Vorzüge. Schon, dass sie zenithal ist, d. h. dass in dem beliebig zu wählenden Centrum die Winkel nicht geändert werden, ist ein Vorzug vor andern äquivalenten Projektionen. Im Centrum werden aber auch die Längen nicht geändert. Ferner sind — wie überhaupt bei jeder zenithalen Darstellung — die Aenderungen der Längen und Winkel in gleichem Abstande vom Centrum gleich gross. Dann giebt es durch jeden Punkt zwei Richtungen, in denen die Längen nicht geändert werden und eine unendliche Menge von Richtungspaaren, deren Winkel nicht geändert werden.

IV. Airy's *Projection by Balance of Errors.*

19. Jede Kartenprojektion ist entweder mit dem Fehler der Flächenänderung oder mit dem der Aenderung der Winkel behaftet.

Der englische Astronom G. B. Airy hat nun versucht, eine zenithale Projektion anzugeben, bei welcher die Gesammtheit dieser Fehler einen möglichst kleinen Werth erreicht.

Vergl. *Explanation of a projection by Balance of Errors for maps applying to a very large extent of the Earth's surface* im Decemberheft 1861 des *Philosophical Magazine.*

20. Airy's Gedankengang ist etwa folgender. Durch zwei gegenüberliegende Punkte O und O_1 der Kugel denken wir uns — analog den Meridianen — eine unendliche Menge grösster Kreise gelegt und ferner nehmen wir auf der Kugel — analog den Parallelkreisen — eine unendliche Menge von Kreisen an, deren Ebenen auf der Geraden OO_1 senkrecht stehen. Durch diese zwei Systeme von Kreisen wird nun die ganze Kugelfläche in eine unendliche Anzahl verschwindend kleiner Rechtecke zerlegt.

Es sei nun a die Seite eines solchen Rechteckes, welche auf einem der grössten Kreise durch O und O_1 liegt, und b sei die Seite, welche auf a senkrecht steht. Dann ist

die Fläche des Rechteckes $f = ab$

und der Winkel ψ, welchen die Diagonale des Rechteckes mit dem grössten Kreise durch O und O' macht, ist durch die Gleichung gegeben

$$\tan \psi = \frac{b}{a}.$$

Auf der Karte wird das Linienelement a durch ein in Richtung des Radius liegendes Element $a + \delta a$ und das Element b

durch ein auf dem Radius senkrecht stehendes Element $b + \delta b$ dargestellt, wo der Buchstabe δ zur Bezeichnung einer Aenderung (Vermehrung oder Verminderung) dient. Auf der Karte ist daher

das Flächenelement $f' = (a + \delta a)\,(b + \delta b)$

und der Winkel ψ' zwischen der Diagonale von f' und dem Radius ist durch die Gleichung bestimmt

$$\tan \psi' = \frac{b + \delta b}{a + \delta a}.$$

Wäre nun $f' = f$, so wäre f', dividirt durch f, der Einheit gleich; Airy nimmt daher als Maass für die Flächenänderung den Ueberschuss dieses Werthes über die Einheit oder

$$\frac{f'}{f} - 1 = \frac{(a + \delta a)\,(b + \delta b)}{ab} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta a \cdot \delta b}{ab}.$$

Das letzte Glied dieser Formel wird aber von Airy weggelassen, was natürlich nur unter der — nicht selbstverständlichen — Voraussetzung nicht statthaft ist, dass δa und δb von einer niedrigeren Ordnung sind als a und b. So bleibt für die Flächenänderung übrig

$$\frac{f'}{f} - 1 = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}. \tag{20}$$

Wäre ferner $\psi' = \psi$, so wäre $\tan \psi \cdot \cot \psi' = 1$; Airy nimmt deshalb als Maass für die Winkeländerung den Ueberschuss des Produktes $\tan \psi \cdot \cot \psi'$ über die Einheit:

$$\tan \psi \cot \psi' - 1 = \frac{b\,(a + \delta a)}{a\,(b + \delta b)};$$

setzt man hier

$$\frac{b}{b + \delta b} = \frac{1}{1 + \frac{\delta b}{b}} = 1 - \frac{\delta b}{b} + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2 - \cdots$$

und lässt man aus der Entwickelung alle Glieder weg, welche mehr als einen Faktor δa und δb enthalten, so erhält man

$$\tan \psi \cdot \cot \psi' - 1 = \frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b} \tag{21}$$

als Maass für die Winkeländerung.

Da nun ein positiver Fehler denselben Einfluss hat, wie ein negativer, so zieht Airy nicht die in (20) und (21) angegebenen Fehler selbst, sondern ihre Quadrate in Betracht; und da dem einen dieser beiden Fehler derselbe Einfluss beigemessen wird, wie dem anderen, so wird die Gesammtänderung des betreffenden Elementes durch die Quadratensumme

$$\left(\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{2}\right) = 2\left[\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta b}{b}\right)^2\right]$$

ausgedrückt, wobei der konstante Faktor 2 ohne Nachtheil weggelassen werden darf, weil es sich nur darum handelt, r so durch

die Amplitude μ auszudrücken, dass die Gesammtänderung ihren kleinsten Werth annimmt.

Haben nun μ, v und r dieselbe Bedeutung wie bisher und nehmen wir den Halbmesser der Kugel gleich der Einheit an, so ist

$$a = d\mu, \qquad a + \delta a = dr, \quad \text{folglich} \quad \frac{\delta a}{a} = \frac{dr}{d\mu} - 1,$$

$$b = dv \cdot \sin\mu, \; b + \delta b = r\,dv, \qquad „ \quad \frac{\delta b}{b} = \frac{r}{\sin\mu} - 1,$$

und mithin ist das Maass für den Fehler der bei der Abbildung des Flächenelementes begangen wird, gleich

$$\left(\frac{dr}{d\mu} - 1\right)^2 + \left(\frac{r}{\sin\mu} - 1\right)^2.$$

Da aber ein Fehler um so mehr Einfluss auf das Ganze hat, je grösser die Fläche ist, auf welche er sich erstreckt, so ist es gerechtfertigt, die vorstehende Formel noch mit der Grösse des Flächenelementes auf der Kugel

$$\sin\mu\, d\mu\, dv$$

zu multipliciren und alsdann die Summe aller Ausdrücke

$$\left[\left(\frac{dr}{d\mu} - 1\right)^2 + \left(\frac{r}{\sin\mu} - 1\right)^2\right] \sin\mu\, d\mu\, dv$$

innerhalb des Bereiches zu bilden, über welches sich die Karte erstreckt, d. h. man muss den vorstehenden Ausdruck sowohl nach v als nach μ integriren. Da sich aber die Integration nach v über das ganze Intervall von 0 bis 2π erstreckt und blos den von μ unabhängigen Faktor 2π liefert, so kann man diese Integration auch ganz unbeachtet lassen und hat sich nur mit dem Integrale

$$(22) \qquad \int_0^\beta \left[\left(\frac{dr}{d\mu} - 1\right)^2 + \left(\frac{r}{\sin\mu} - 1\right)^2\right] \sin\mu\, d\mu\, dv$$

zu beschäftigen, wenn man die Karte von $\mu = 0$ bis $\mu = \beta$ ausdehnen will.

Bezeichnen wir $r - \mu$ mit y, $\frac{dy}{d\mu}$ mit p, so können wir dem Integral (22) die Form geben

$$(23) \qquad \int_0^\beta \left[p^2 \sin\mu + \frac{(y + \mu - \sin\mu)^2}{\sin\mu}\right] d\mu = \int_0^\beta V\, d\mu,$$

Die Bedingungen dafür, dass dieses Integral seinen Minimalwerth erreicht, sind den Regeln der Variationsrechnung gemäss

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial p\, \partial \mu} = 0 \\ \text{und } \dfrac{\partial V}{\partial p} = 0 \text{ für } \mu = \beta. \end{array} \right.$$

Da $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2(y+\mu-\sin\mu)}{\sin\mu}$, $\frac{\partial V}{\partial p} = 2p\sin\mu$

und $\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial\mu} = \frac{2d^2y}{d\mu^2}\sin\mu + 2p\cos\mu$

ist, so geht die erste dieser Bedingungen (24) über in

$$\frac{y+\mu-\sin\mu}{\sin\mu} - \sin\mu\frac{d^2y}{d\mu^2} - \cos\mu\frac{dy}{d\mu} = 0$$

oder

$$\sin^2\mu\cdot\frac{d^2y}{d\mu^2} + \sin\mu\cos\mu\frac{dy}{d\mu} - y = \mu - \sin\mu. \tag{25}$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man

$$\sin\mu\cdot\frac{dy}{d\mu} + y = z;$$

dann ist, wenn wir einmal nach μ differentiiren,

$$\frac{dz}{d\mu} = \sin\mu\frac{d^2y}{d\mu^2} + \cos\mu\frac{dy}{d\mu} + \frac{dy}{d\mu}$$

und mithin

$$\sin^2\mu\frac{d^2y}{d\mu^2} + \sin\mu\cos\mu\frac{dy}{d\mu} - y = \sin\mu\frac{dz}{d\mu} - z.$$

Die Gleichung (25) geht also über in

$$\sin\mu\frac{dz}{d\mu} - z = \mu - \sin\mu.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\operatorname{cosec}^2\frac{\mu}{2}$, so kann man ihr die Form geben

$$\frac{dz\cot\frac{1}{2}\mu}{d\mu} = \frac{\mu-\sin\mu}{2\sin^2\frac{1}{2}\mu}$$

und es ist also

$$z = \tfrac{1}{2}\tan\tfrac{1}{2}\mu\int\frac{\mu-\sin\mu}{\sin^2\frac{\mu}{2}}d\mu,$$

d. i., wenn man für z seinen Werth setzt und sich erinnert, dass

$$\int\frac{\mu-\sin\mu}{\sin^2\frac{\mu}{2}}d\mu = -2\mu\cot\frac{\mu}{2} + C$$

ist,

$$\sin\mu\frac{dy}{d\mu} + y = -\mu + \frac{C}{2}\tan\frac{\mu}{2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung beiderseits mit $\frac{d\mu}{\cos^2\frac{\mu}{2}}$, so kann man die rechte Seite in der Form

$$\frac{2\,d\left(y \tan\frac{\mu}{2}\right)}{dy}$$

schreiben und man hat also

$$2y \tan\frac{\mu}{2} = -\int \mu \frac{d\mu}{\cos^2\frac{\mu}{2}} + \frac{C}{2}\int \tan\frac{\mu}{2} \cdot \frac{d\mu}{\cos^2\frac{\mu}{2}} + C',$$

d. i.

$$2y \tan\frac{\mu}{2} = -2\mu \tan\frac{\mu}{2} - 4\, l \cos\frac{\mu}{2} + C \tan^2\frac{\mu}{2} + C',$$

und mithin

$$(26)\qquad y = -\mu - 2 \cot\frac{\mu}{2}\, l \cos\frac{\mu}{2} + \frac{C}{2}\tan\frac{\mu}{2} + \frac{C'}{2}\cot\frac{\mu}{2},$$

wo C und C' die Integrationskonstanten sind und l den natürlichen Logarithmus andeutet.

Da für $\mu = 0$ auch $y = 0$ wird, so muss $C' = 0$ sein.

Die andere Konstante C bestimmt sich mittels der zweiten der Gleichungen (24), die man auch in der Form schreiben kann

$$\frac{dy}{d\mu} = 0 \quad \text{für } \mu = \beta.$$

Nun ist aber zufolge (26), wenn man daselbst $C' = 0$ setzt,

$$\frac{dy}{d\mu} = \operatorname{cosec}^2\frac{\mu}{2}\, l \cos\frac{\mu}{2} + \frac{C}{4}\sec^2\frac{\mu}{2},$$

und mithin ist

$$C = -4 \cot^2\frac{\beta}{2}\, l \cos\frac{\beta}{2}.$$

Man hat also für y die Endformel

$$y = -\mu - 2 \cot\frac{\mu}{2}\, l \cos\frac{\mu}{2} + \tan\frac{\mu}{2} \cot^2\frac{\beta}{2}\, l \sec^2\frac{\beta}{2}$$

und für r ergiebt sich also der Werth

$$(27)\qquad r = -2 \cot\frac{\mu}{2}\, l \cos\frac{\mu}{2} + \tan\frac{\mu}{2} \cot^2\frac{\beta}{2}\, l \sec^2\frac{\beta}{2}.$$

Will man in dieser Formel statt der natürlichen gemeine Logarithmen nehmen, so hat man die rechte Seite mit 2,302585 . . zu multipliciren.

Wenn man $\mu = \beta$ setzt, so ergiebt sich der äusserste Halbmesser der Karte

$$R = 2 \cot\frac{\beta}{2}\, l \sec^2\frac{\beta}{2}.$$

Dieser Werth ändert sich mit wachsendem β nicht beliebig weit, sondern erreicht seinen grössten Werth für $\beta = 126^0\ 24'\ 53''$; für grössere Werthe von β nimmt er wieder ab.

Auf **Taf. VI** giebt **Fig. XXXIV** ein Netz nach dieser Darstellungsweise; als Mittelpunkt ist dabei ein Punkt auf dem Wendekreise des Krebses ($23\frac{1}{2}^{0}$ nördl. Breite) angenommen, entsprechend dem, was auf Seite 96 und 97 betreffs der perspektivischen Darstellung von James auseinander gesetzt worden.

§. 25.

Verschiedene konventionelle Darstellungsweisen.

I. Die trapezförmige Projektion.

1. Bei dieser Projektion erscheinen die Parallelkreise in Gestalt paralleler Geraden, die Längengrade auf einem Parallel sind alle gleich gross und auf den beiden äussersten Parallelen oder auf irgend ein Paar beliebigen Parallelen sind die Grade in ihrer richtigen Grösse dargestellt; der mittelste Meridian schneidet alle Parallelen rechtwinklig und auf ihm erscheinen alle Breitengrade in ihrer wahren Grösse; die übrigen Parallelkreise erscheinen als schräge Grade, die in Verbindung mit den äquidistanten Parallelen ein Netz mit trapezförmigen Maschen darstellen.

2. Nach diesen Angaben ist es sehr leicht, eine solche Karte zu zeichnen, indem man sich zuerst den Mittelmeridian mit seinen gleichen Theilen angiebt, durch die Theilpunkte die Parallelen zieht, welche die Parallelkreise darstellen, dann auf zwei Parallelen die richtigen Grössen der Längengrade abträgt und schliesslich die Punkte gleicher Länge auf diesen Parallelen durch gerade Linien verbindet.

Auf diese Weise werden, wie leicht ersichtlich, die Längen auf den Zwischenparallelen verkleinert, während sie jenseits der beiden in wahrer Grösse dargestellten Parallelen vergrössert werden.

Auf **Taf. VI** zeigt uns **Fig. XXXV** eine Darstellung der Hälfte der nördlichen Erdkugel, wobei auf den Parallelen von 30 und 60° Breite die Längen richtig angegeben sind.

3. Diese Projektion ist zu Anfang des vierzehnten Jahrhunderts als eine Modifikation der bis dahin üblichen rechteckigen Plattkarten eingeführt worden. Diese Plattkarten findet man namentlich noch in den älteren Manuskripten des Ptolemäus, aber in dem griechischen Manuskript der Geographie des Ptolemäus Nr. 1401 der Pariser Bibliothek, welches aus dem vierzehnten Jahrhunderte stammt, sind die Karten meist in der trapezförmigen Modifikation ausgeführt.

An dieser Stelle mag auch einer von F. und F. M. L. Donny im Jahre 1849 in Vorschlag gebrachten Projektion kurz Erwähnung geschehen. (Vergl. *Sur une projection géographique nouvelle* im *Bull. de l'Acad. de Brux. XVI, 2. part., 1849, p. 391.*) Ein von zwei Parallelkreisen und zwei Meridianen begrenztes Stück der Kugel wird hier durch ein Trapez dargestellt, dessen Seiten ihre wahre Länge beibehalten haben.

II. Die Globular-Projektion.

4. Man bedient sich dieser Projektion häufig zur Darstellung der Erdhalbkugeln. Jede Halbkugel erscheint als ein Kreis, dessen Umfang durch die Parallelkreise und den Aequator in gleich grosse Theile getheilt wird; der Aequator und der erste Meridian werden durch ein Paar auf einander senkrechten Durchmesser dargestellt, jener wird durch die Meridiane, dieser durch die Parallelkreise in gleiche Theile getheilt.

5. Nach diesen Angaben ist die Konstruktion des Netzes sehr leicht: Durch den Punkt O, das Centrum der Karte, ziehe man zwei auf einander senkrechte Gerade, auf denen man die wahren Längen der Meridian- und Aequatorgrade abträgt. Man erhält so auf der einen Geraden die beiden Pole Q und Q_1, auf der anderen die um 90° von O abstehenden Aequatorpunkte A und A_1, s. auf **Taf. VI Fig. XXXVI.** Dann schlägt man um O einen durch die genannten vier Punkte gehenden Kreis, den man in die entsprechende Anzahl gleicher Theile theilt, also in 36, wenn man, wie in unserer Figur, die Meridiane und Parallelen von 10 zu 10° angeben will. Jeder Parallelkreis und ebenso jeder Meridian ist nun durch drei Punkte bestimmt. Z. B. der Meridian von 50° Länge muss durch die Pole Q und Q_1 und ausserdem durch einen Aequatorpunkt B gehen; um nun sein Centrum zu finden, verbinde man B mit Q durch eine Gerade, halbire dieselbe in C und errichte hier eine Senkrechte auf ihr, welche AA_1 in dem gesuchten Mittelpunkte D schneidet. In analoger Weise werden auch die Parallelkreise gefunden.

6. Diese Darstellungsweise ist zuerst von I. B. Nicolosi aus Paterno in Sicilien angewandt worden, welcher im Jahre 1660 eine Anzahl von Darstellungen der beiden Hemisphären und der verschiedenen Welttheile in dieser Projektion veröffentlichte. Sie fand dann in Frankreich rasch Anklang und wurde u. a. 1676 von Pierre du Val, 1688 von Jeaugeon, 1700 von de Fer, 1714 von Guillaume de l'Isle angewandt; 1794 wurde sie von dem Engländer Aaron Arrowsmith unter dem Namen „globulare Projektion" adoptirt und seitdem führt sie auch nicht selten den Namen „englische" oder „Arrowsmith'sche Projektion".

Sie hat mit der äpuidistanten (Postel'schen) Meridian-Projektion (S. 238) die gleiche Theilung des Mittelmeridianes und Aequators gemein, sollte aber nicht mit dieser verwechelt werden, wie bisweilen geschieht; denn bei der äquidistanten Projektion sind die Parallelen und Meridiane keine Kreisbogen, sondern transcendente Kurven.

Dagegen weicht die Globular-Projektion nur wenig ab von den perspektivischen Meridian-Projektionen von Parent und La Hire, wiewohl hier die Parallelkreise und Meridiane Ellipsen sind.

III. Die Projektion von Petrus Apianus und verwandte.

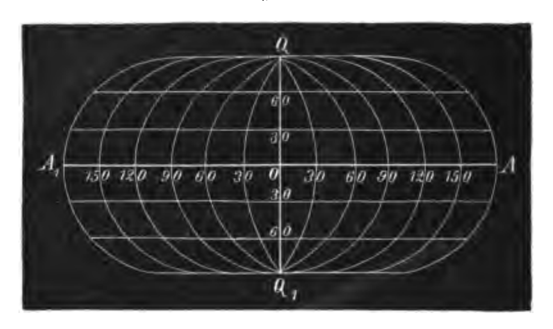
7. Der deutsche Mathematiker Petrus Apianus (Bienewitze oder Bennewitz, geb. 1495 in der Leissniger Gegend in Sachsen,

gest. 1552 in Ingolstadt) hat in seiner *Cosmographia*, *Landish.* 1524 eine Projektion der Erdoberfläche angegeben, die um die Mitte des sechszehnten Jahrhunderts zur Herstellung von Weltkarten sehr beliebt war und namentlich von Sebastian Cabot zu seiner grossen Weltkarte, ferner von Bordone, Ortelius u. a. verwendet wurde. Später ist dieselbe indessen wieder in Vergessenheit gerathen und durch rationellere Darstellungen verdrängt worden. Mann kann die Regel des Apianus wie folgt angeben.

Auf der Geraden AA_1 trage man sich, wenn beispielsweise die Längen und Breiten von 30 zu 30° angegeben werden sollen, zwölf gleiche Theile ab, errichte im mittelsten Theilpunkte O eine



Fig. 68.



Senkrechte QQ_1 und trage jederseit drei Theile ab, worauf man durch die Theilpunkte, sowie durch Q und Q_1 Parallelen zu AA_1 zieht. Alsdann setzt man den Zirkel in O ein und schlägt mit OQ als Halbmesser einen Kreis, der die Meridiane von 90° östl. und westl. Länge angiebt. Hierauf setzt man den Zirkel noch in jedem der innerhalb dieses Kreises liegenden Theilpunkte von AA_1 ein und schlägt einen Kreisbogen, von dem man aber blos das ausserhalb des vorerwähnten Kreises liegende Stück, von der Parallelen durch Q bis zu der durch Q_1, benutzt. Durch jeden der Theilpunkte innerhalb des erwähnten Vollkreises und durch Q und Q' wird ausserdem noch ein Kreisbogen gelegt.

Bei Apianus selbst und bei Cabot ist die Sache insofern etwas anders, als die Längen um $\frac{1}{3}$ kleiner als die Breiten dargestellt sind, um eine zu grosse Ausdehnung der Karte in der Längenrichtung zu vermeiden.

8. Die Darstellung, welche Heinrich Glareanus (Loritus, Loriti oder Loreti, geb. 1488 in Mollis, Kanton Glarus, gest. 1563 zu Freiburg im Breisgau) im Jahre 1527 gegeben hat, stimmt mit der des Apianus rücksichtlich der Meridiane überein, die Parallelen nimmt er aber nicht äquidistant, sondern so an, dass sie den Meridian von 90° in gleiche Theile theilen.

Das Werk, worin sich diese Projektion beschrieben findet, *Henrici Glareani poetae laureati de geographia liber unus. Bas.* 1527 (Kap. X fol. 12), ist ausserdem noch dadurch merkwürdig, dass sich in demselben zuerst (Kap. XIX) ein Verfahren zur ebenen

Konstruktion des Netzes für einen Globus findet, während man früher unmittelbar auf die Kugel gezeichnet hatte.

9. Wenn man, wie Glareanus, die beiden Meridiane von 90° östl. und westl. Länge durch einen Kreis und die Parallelkreise durch parallele Sehnen darstellt, die jenen in gleiche Theile theilen, dann aber weiter annimmt, dass nicht blos der Aequator, sondern auch die sämmtlichen Parallelen durch die Meridiane in gleiche Theile getheilt werden, so erhält man eine, die Arago in seiner *Astronomie populaire* für die Erdhalbkugel anwendet.

Sie stimmt übrigens im Wesentlichen überein mit der einen der beiden Projektionen, welche der Jesuit Georges Fournier im Jahre 1643 in seiner *„Hydrographie"* in Vorschlag gebracht hat. Bei seiner andern Projektion will Fournier die Parallelen durch Kreise darstellen, welche den (geradlinigen) ersten Meridian und den (kreisförmigen) Meridian von 90° östl. und westl. Länge in gleiche Theile schneiden, wie bei der Globular-Projektion.

Prof. Georg Gottlieb Schmidt in Giessen hat in seinem „Hand- und Lehrbuch der Naturlehre", 2. Abth. Darmstadt und Giessen 1801 — 1803, eine ähnliche Darstellungsmethode angegeben. Die Meridiane konstruirt er gleichfalls als Ellipsen, die den geradlinigen Aequator in gleiche Theile theilen; die Parallelkreise aber findet er, indem er alle diese Ellipsen in gleiche Theile theilt und die entsprechenden Theilpunkte verbindet.

IV. Jäger's Polar-Sternprojektion.

10. In Nr. 37 der Zeitschrift „Das Ausland", Jahrgang 1865, hat der Direktor des Thiergartens in Wien, Dr. G. Jäger, in einem Aufsatze: „Der Nordpol, ein thiergeographisches Centrum" eine von ihm erfundene Weltkarte „in polygonaler Nordpolar-Sternprojektion" erwähnt. Diese Karte ist später gelegentlich des Wiederabdruckes jenes Aufsatzes im Ergänzungsheft Nr. 16 zu Petermann's geograph. Mitth. veröffentlicht worden, doch mit zwei von Dr. A. Petermann angebrachten Modifikationen. Die Jäger'sche Projektion weicht nämlich von der Petermann'schen, die uns auf **Taf. VI** unsere **Fig. XXXVII** zeigt, insofern ab, als sie

1. Die Parallelkreise, anstatt durch Kreise, durch achteckige Polygone darstellt, und
2. anstatt acht kongruenter Dreiecke acht inkongruente annimmt, und zwar aus Rücksicht auf eine möglichst vortheilhafte Theilung der Landmassen in der südlichen Halbkugel. Dadurch entstanden Dreiecke, deren Seiten am Aequator zwischen 35 und 55 Längengraden schwankten, und zwar eines mit 55°, drei mit 50°, eines mit 45°, eines mit 40° und zwei mit 35°.

Wie man aus der Figur ersieht, ist bei Petermann die nördliche Halbkugel in äquidistanter Polarprojektion dargestellt, während sich die südliche in Form von acht kongruenten Dreiecken repräsentirt. Alles weitere ist aus der Figur klar.

Jäger selbst giebt an, dass die Karte ihm „die Grundlage zu thiergeographischen Untersuchungen abzugeben bestimmt“ war. „Es ist mir nämlich,“ schreibt er, „längst klar, dass der Schlüssel zum Verständniss der Thiergeographie auf der nördlichen und nicht auf der südlichen Halbkugel zu suchen ist, und so empfand ich das Bedürfniss, eine Planiglobus-Karte zu haben, welche nicht wie die Mercator-Karte den Zusammenhang an der wichtigsten Stelle, dem Nordpol zerreisst, sondern intakt lässt“. Ganz abgesehen von diesem speciellen Zwecke, kann die Karte aber auch in vielen anderen Fällen Verwendung finden. Petermann hebt als wesentliche Vorzüge derselben hervor:

1. dass die Landmassen der Erde in fast ganz vollständigem Zusammenhange gezeigt werden, da trotz der Zerlegung der Südhemisphäre in acht Dreicke das Festland doch ziemlich günstig wegkommt, und
2. dass das Areal von Land und Wasser annähernd richtig ist.

Verzeichniss

der auf den Tafeln enthaltenen Darstellungen.

Tafel III.

Tafel IV.

Fig. XX. Darstellung der ganzen Erdoberfläche in Lambert's isosphärischer stenoterer Projektion; die Radien der Parallelkreise sind nach der Formel bestimmt

$$r = 2a\sqrt{m}\sin\frac{90^0 - \varphi}{2},$$

und zwar hat auf unserer Karte m den Werth $2(2 - \sqrt{2}) = 1,1715\ldots.$ — Erläuterung S. 151 — 153 und 187.

Fig. XXI. Darstellung der Kugel vom Pol bis 40° südl. Breite nach Lambert's (Gauss's) konformer Abbildungsweise; der Radius des Parallels von der Breite φ ist

$$r = c\tan^{\mu}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

und zwar ist in der Figur $\mu = \frac{1}{2}$. — Erläuterung S. 153 — 157 u. S. 213 — 219, sowie über die Stellung dieser Projektion zur Lagrange'schen S. 230 unten.

Fig. XXII. Darstellung der nördlichen Halbkugel in Bonne's Projektion. — Erläuterung S. 159 u. f. und S. 193 — 198.

Fig. XXIII. Die ganze Kugel in der Sanson-Flamsteed'schen (sinusoidalen) Projektion. — Erläuterung S. 160 u. f.

Fig. XXIV. Die westliche Halbkugel in Joh. Werner's äquivalenter Darstellung. — Erläuterung S. 162.

Fig. XXV. Ueber $\frac{3}{4}$ der Kugeloberfläche in der amerikanischen polykonischen Projektion. — Erläuterung S. 163 — 167.

Tafel V.

Fig. XXVI. Die westliche Halbkugel in rektangulärer polykonischer Projektion. — Erläuterung S. 168 — 172.

Fig. XXVII. Die ganze Kugel in Mollweide's äquivalenter (Babinet's homalographischer) Projektion. — Erläuterung S. 179 bis 181 (Nr. 6 des §. 17) und S. 188 — 193.

Fig. XXVIII. Darstellung der Halbkugel nach Collignon's Methode. — Erläuterung S. 182 u. f. (Nr. 8 des §. 17). Die auf S. 183 unten angegebene Konstruktion der Parallelen konnte wegen Mangel an Platz nicht eingezeichnet werden; der Leser wird sie aber nach der Beschreibung leicht verstehen und ausführen können.

Fig. XXIX. Die nördliche Halbkugel in Lagrange's konformer Projektion: die Meridiane sind Kreise, welche mit einander in den Polen Winkel einschliessen, die das $2c$-fache von denen der Meridiane auf der Kugel, beziehentlich

dem Ellipsoid sind; die Parallelen sind ebenfalls Kreise. In der Figur ist $c = \frac{1}{4}$. — Erläuterung S. 219 — 233.

Fig. XXX. Die nördliche Halbkugel in äquidistanter Polarprojektion. — Erläuterung S. 238 — 240.

Fig. XXXI. Aequidistante Meridianprojektion einer Halbkugel. — Erläuterung S. 238 — 240.

Tafel VI.

Fig. XXXII. Polarprojektion in Lambert's isomerer (vergl. S. 187) Darstellungsweise mit Andeutung der Konstruktion. — Erläuterung S. 241 — 246.

Fig. XXXIII. Meridianprojektion einer Halbkugel nach derselben Methode. — Erläuterung S. 247 — 251.

Fig. XXXIV. Darstellung einer Halbkugel nach Airy's *Projection by Balance of Errors.* — Erläuterung S. 247 — 252.

Fig. XXXV. Trapezförmige Darstellung eines Erdquadranten vom Aequator bis zum Pole und von 90° östl. bis 90° westl. Länge. Die Längengrade sind unter 30° und 60° Breite in richtiger Grösse gezeichnet. — Erläuterung S. 252.

Fig. XXXVI. Eine Halbkugel in Globular-Projektion. — Erläuterung S. 253 — 255. Die in Nr. 5 des §. 25 (S. 253) angegebene Konstruktion ist auf der Tafel nicht angedeutet.

Fig XXXVII. Dr. Jäger's Nordpolar-Sternprojektion der ganzen Erde, modificirt von Dr. Petermann. — Erläuterung S. 255 u. 256.

Druck von B. F. Voigt in Weimar.

TAF. I.

Fig. V.

Fig. III. a.

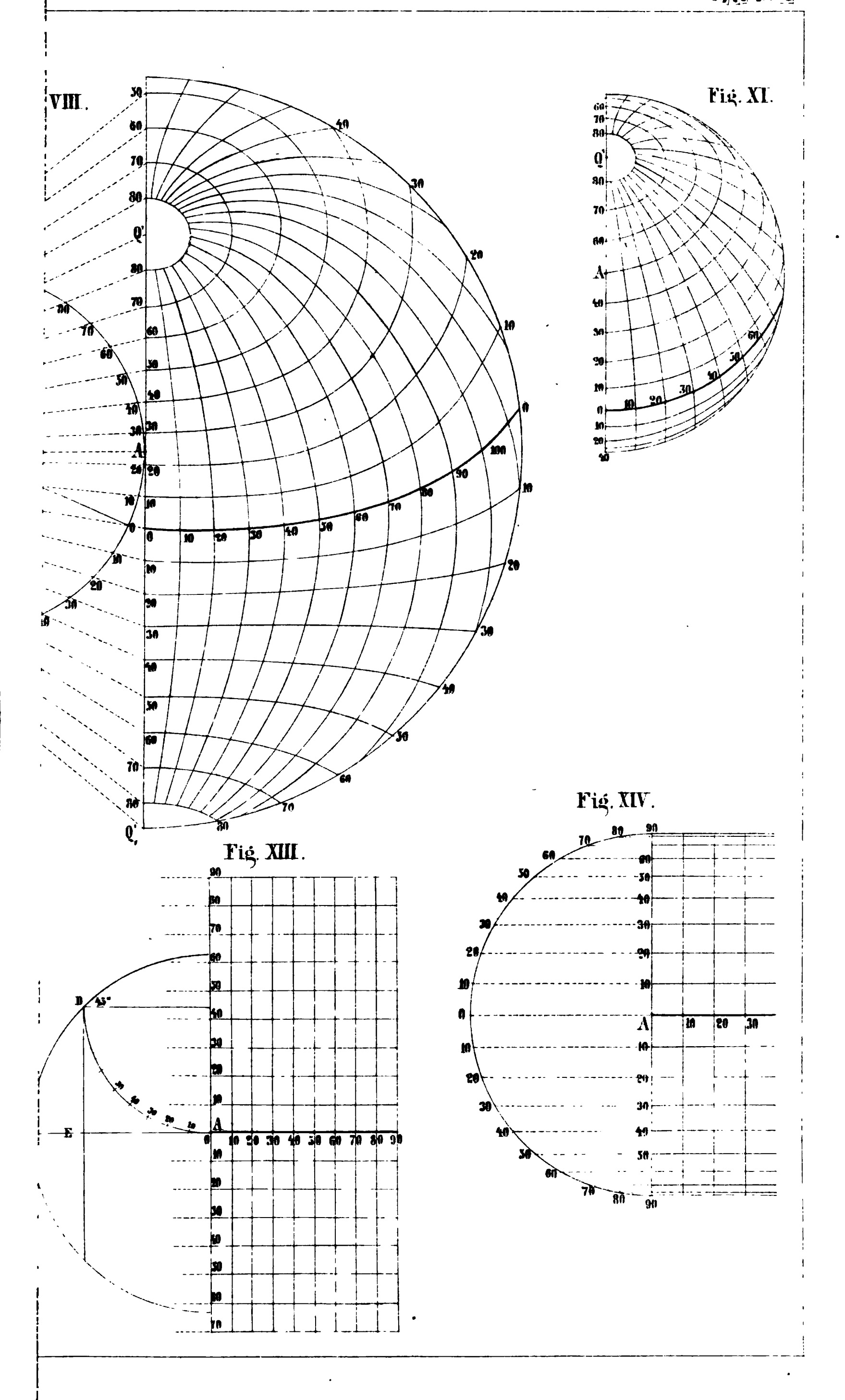
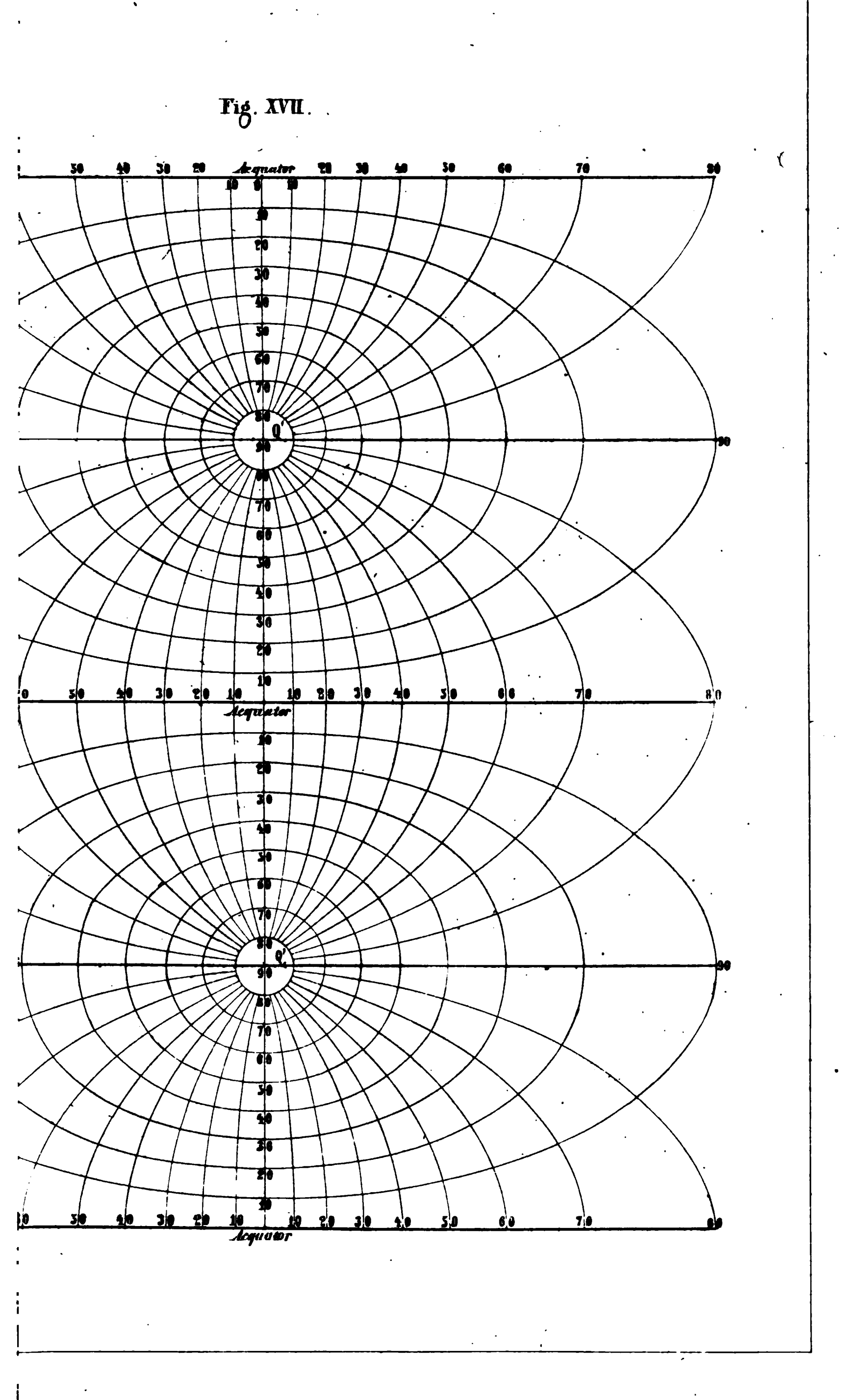
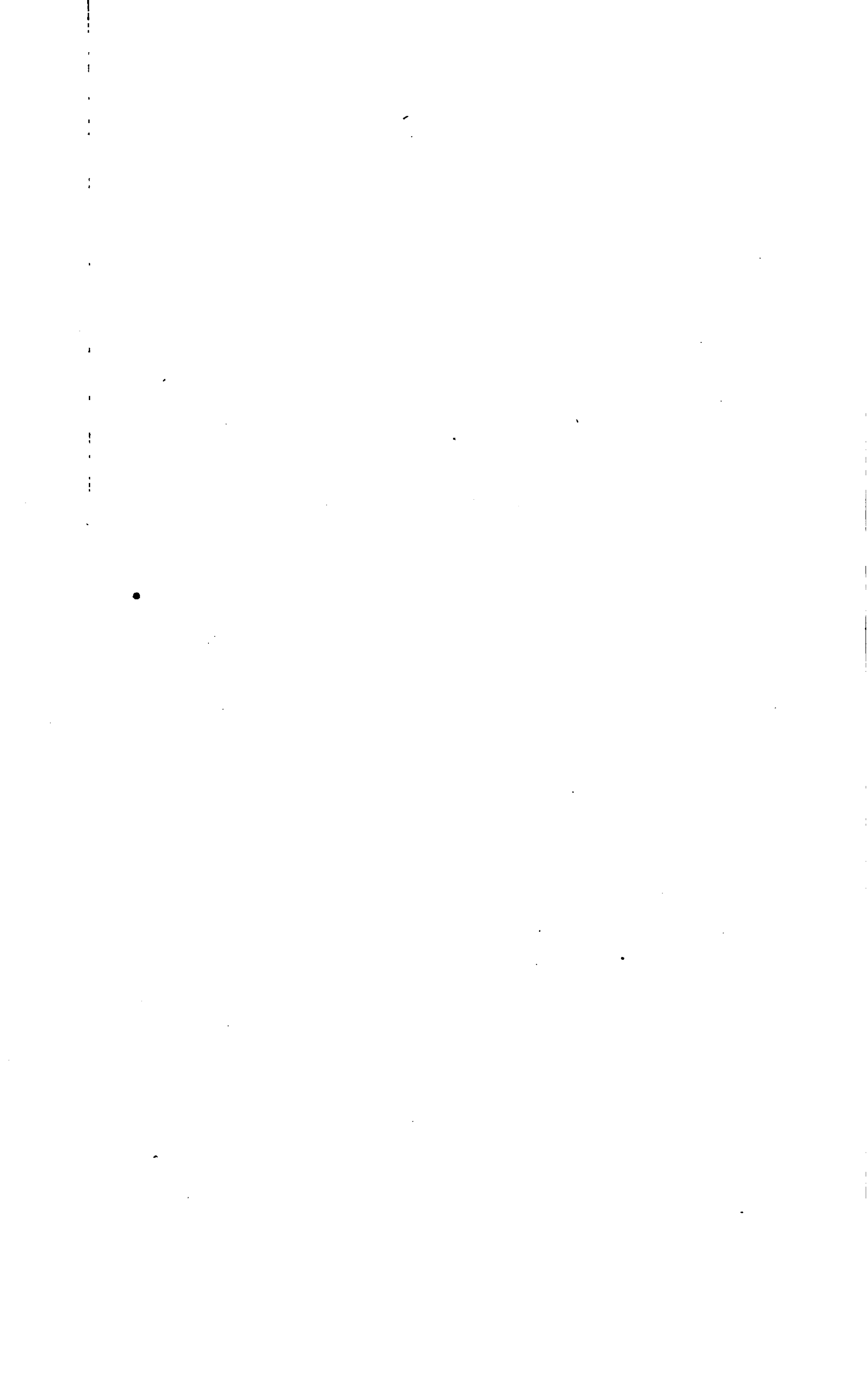
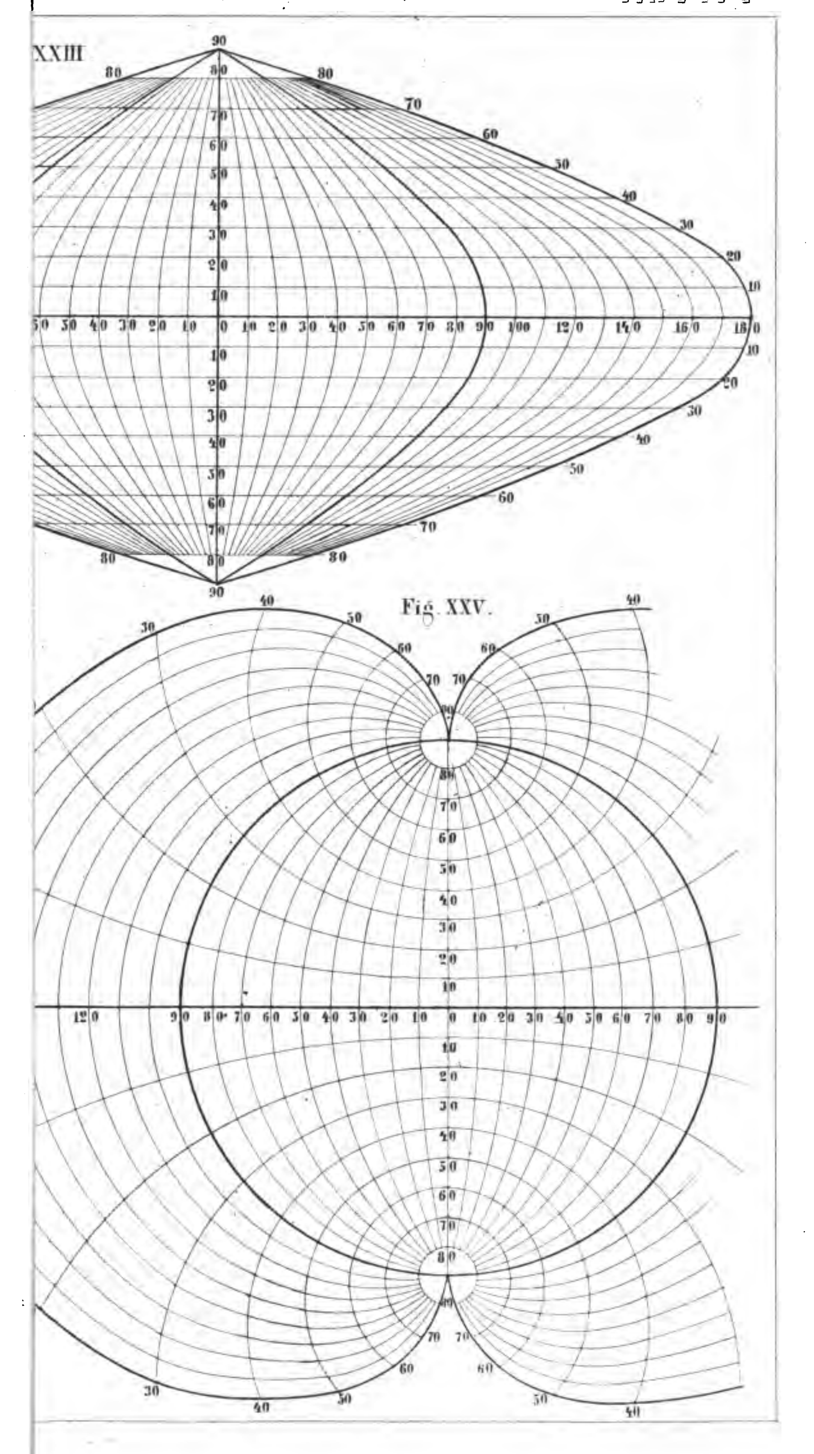

VIII.
Fig. XI.
Fig. XIII.
Fig. XIV.
Q'
A
D
E
45°

Fig. XVII.






XXIII
Fig. XXV.



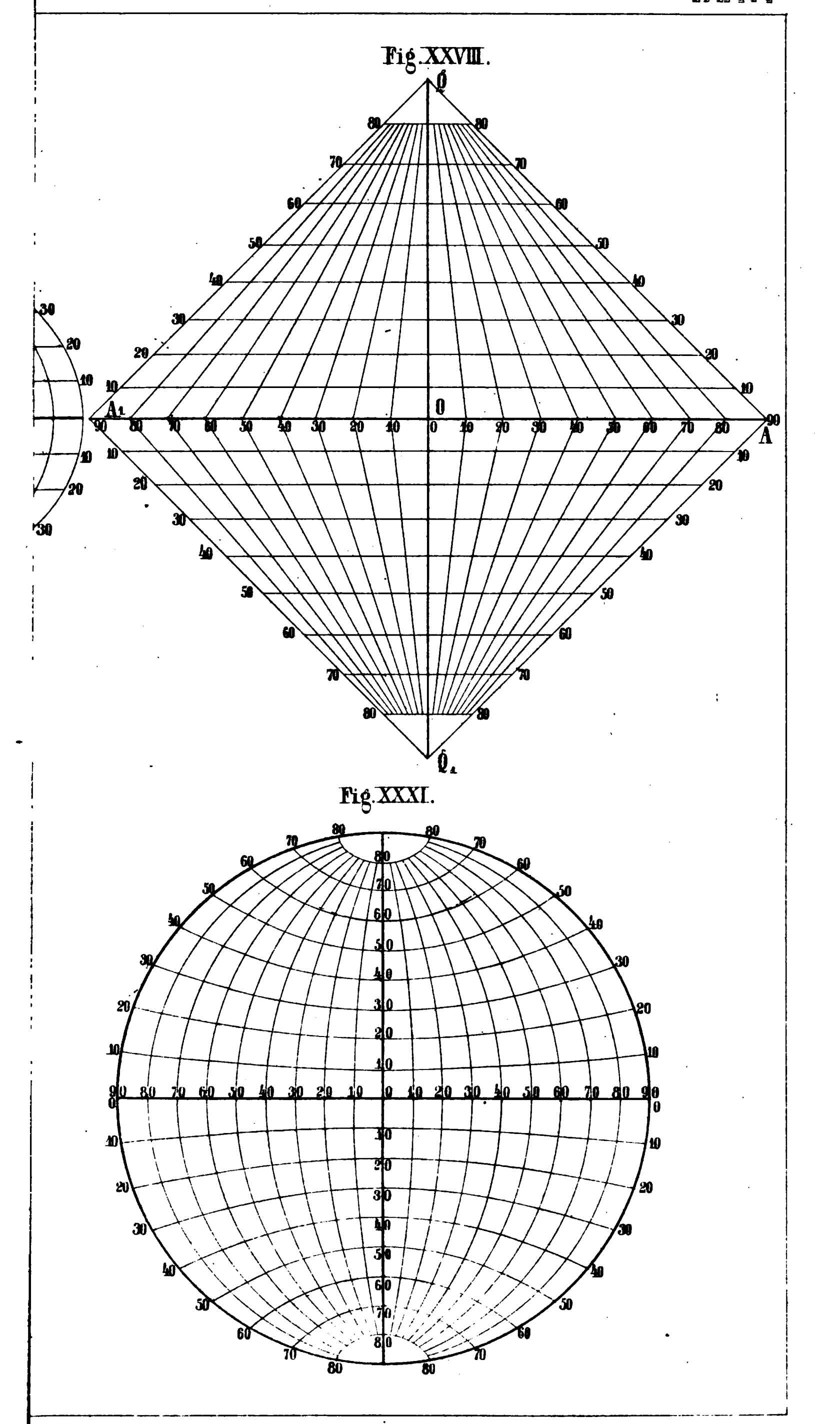


Fig. XXVIII.

Fig. XXXI.

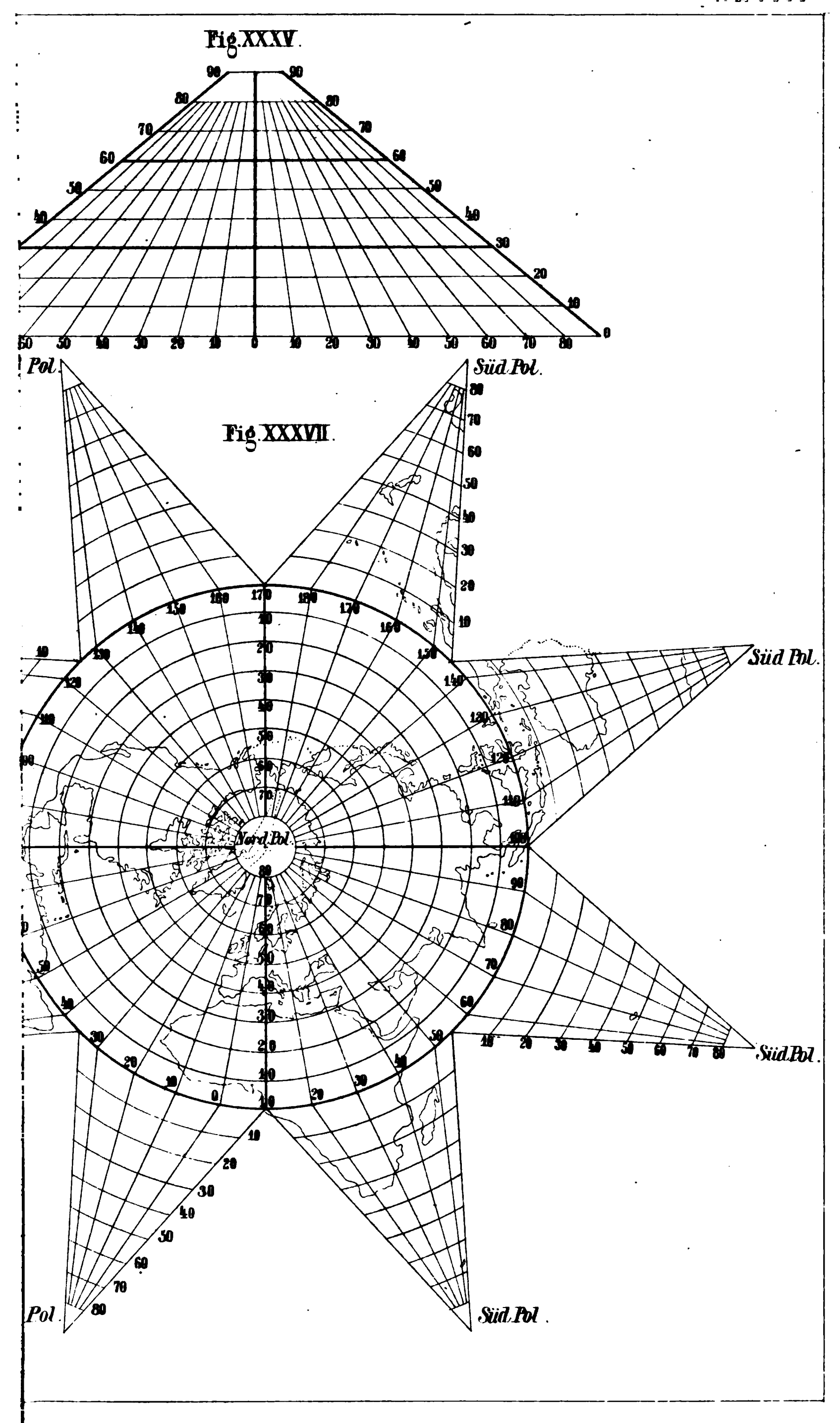
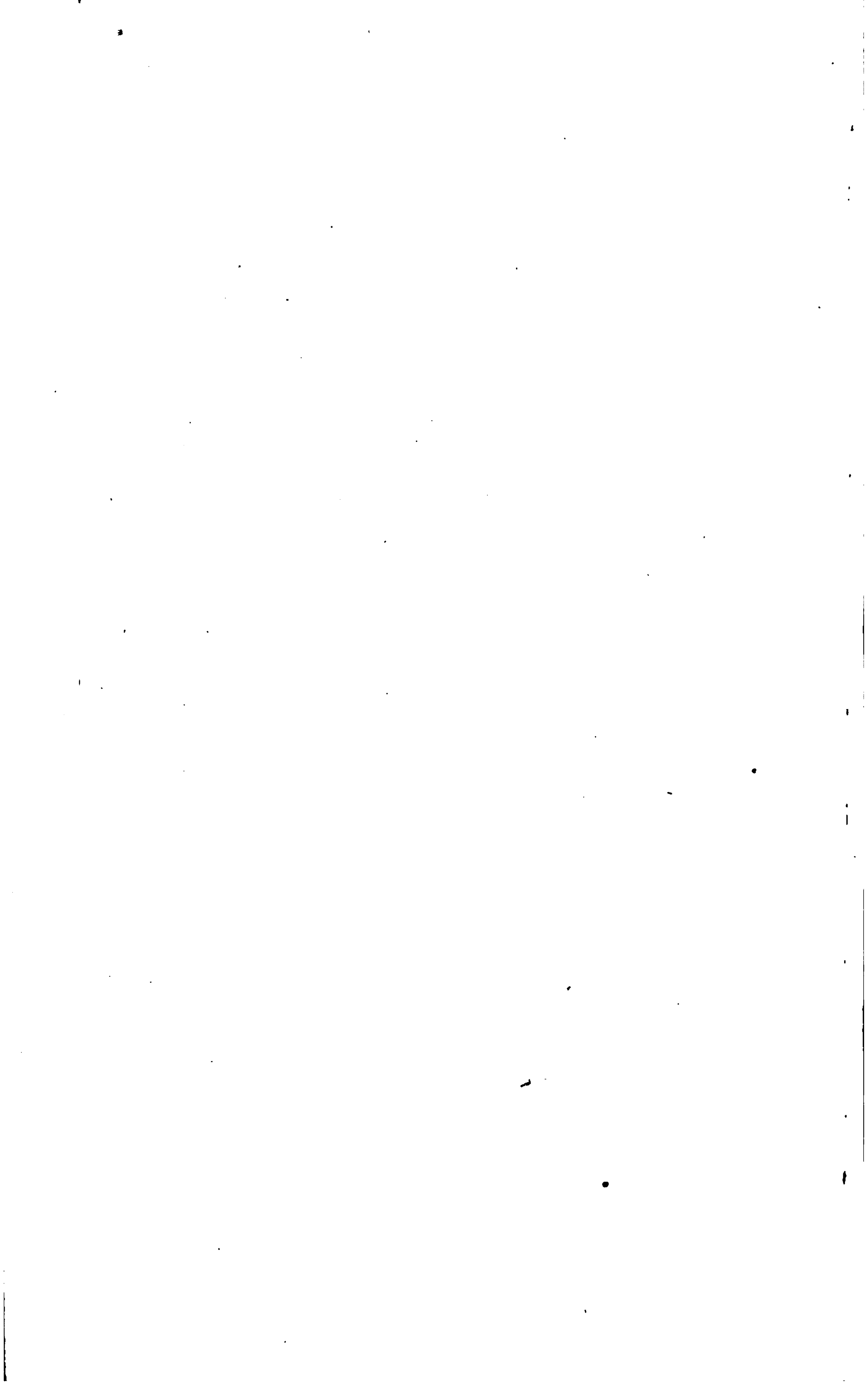
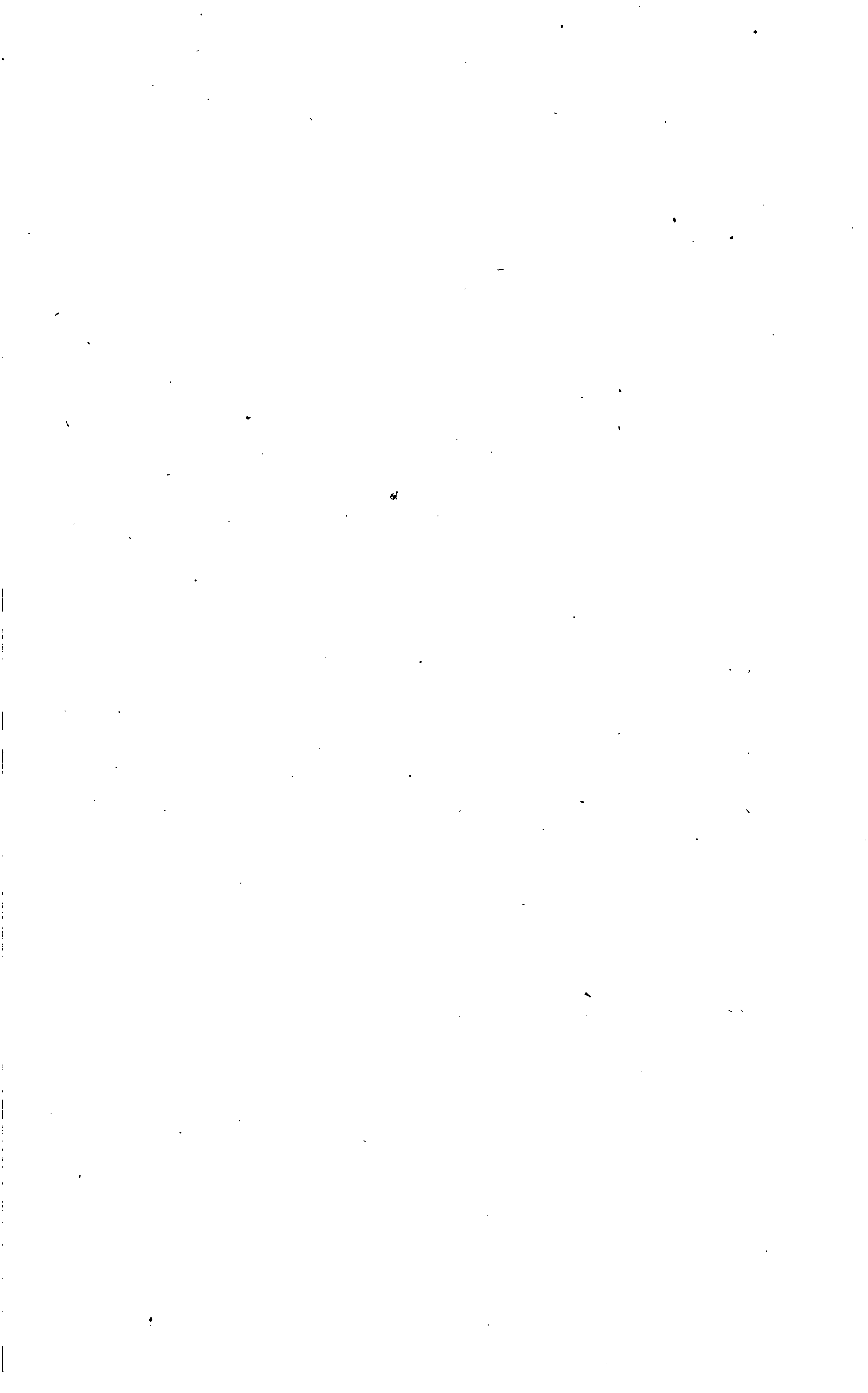
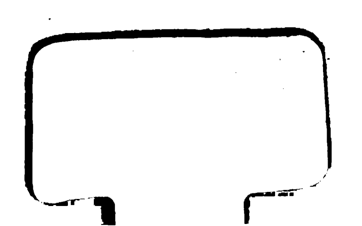


Fig. XXXV.
Fig. XXXVII.
Nord Pol.
Süd Pol.
Pol.










Eng 528.73
Lehrbuch der karten-projektion,
Cabot Science 005091239
3 2044 091 992 503